الإحصاء

الوصفي والتطبيقي والحيوي

الدكتور
محمد حسين محمد رشيد

www.darsafa.net

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (958/ 4/ 2007)

519.53

رشيد، محمد

الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي/ محمد حسين رشيد.- عمان: دار صفاء، 2007.

( ) ص

ر. أ (958/ 4/ 2007)

الواصفات : الإحصاء الوصفي/

* تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى

2008 م - 1428 هـ

دار صفـــاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس4612190

ص.ب 922762 عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

http://www.darsafa.com

E-mail :safa@darsafa.com

ISBN - 978 - 9957 - 24 – 277-0 ردمك

الإحصاء

الوصفي والتطبيقي والحيوي

تأليف

محمد حسين محمد رشيد

الطبعة الأولى

2008 م – 1428هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المحتويات

الوحدة الثالثة
مقاييس النزعة المركزية

الوحدة الرابعة
مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتفرطح

الوحدة الخامسة
الارتباط والانحدار

الوحدة السادسة

الاحتمالات

الوحدة السابعة

التوزيع الطبيعي

الوحدة الثامنة

الأرقام القياسية

الوحدة التاسعة

السلاسل الزمنية

الوحدة العاشرة
الإحصاءات الحيوية والسكانية

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد الخلق محمد بن عبد الله صلى الله عليه وسلم.

أما بعد:

تكمن أهمية دراسة الإحصاء بأنه وسيلة وليست غاية، لذلك أصبح علم الإحصاء يستعمل كوسيلة لتحليل المشكلات بشكل موضوعي ولخدمة العلماء في شتى مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بأدوات تحليلية تساعدهم على تحقيق فهم أفضل للأوضاع القائمة سواء في المشروع أو المجتمع أو شتى مجالات الحياة.

ونظراً لافتقار المكتبة العربية إلى الكتب العلمية في مختلف العلوم، وكما أن الدراسة في جامعاتنا العربية ما زالت تدرس بلغة غريبة عن طلبتنا، فقد جاء هذا الكتاب يسد ولو جزءاً بسيطاً من هذه الحاجة. فجاء تناولي لهذا الكتاب بشمولية وتفصيلاً فطرحنا الأمثلة العديدة والمتنوعة بمختلف المستويات لتأتي ملبية لجميع مستويات الطلبة.

فجاء الكتاب في عشرة فصول حيث تناول الفصل الأول تعريف علم الإحصاء وأهميته وكيفية جمع البيانات...الخ، أما في الفصل الثاني فقد تناولنا موضوع عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية، وفي الثالث تم تناول موضوع مقاييس النزعة المركزية وفي الرابع تناولنا موضوع مقاييس التشتت أما الانحدار والارتباط فتم تناوله في الخامس وفي الفصل السادس تم تناول موضوع الاحتمال، وفي السابع موضوع التوزيع الطبيعي، وفي الفصل الثامن تناولنا الأرقام القياسية وفي التاسع تناولنا السلاسل الزمنية وفي الفصل الأخير تناولنا الإحصاءات الحيوية والسكانية.

وأتوجه بالشكر الجزيل لكل من ساهم في إعداد هذا الكتاب سواء عن طريق

الملاحظات أو بالدعم المعنوي، كذلك أتوجه بالشكر إلى مكتب روعة للطباعة على ما بذلوه أثناء طباعة هذه المادة.

وأخيراً لا ندعي الكمال في هذا العمل، لذا أتوجه من زملائي المدرسين وأحبتي الطلبة لتزويدي بأية ملاحظات واقتراحات لتلافيها في الطبعات القادمة.

المؤلف

جامعة البلقاء التطبيقية- كلية الكرك

قسم العلوم الأساسية

١٧ ذو الحجة سنة ١٤٢٢ هجري

الموافق ١ آذار سنة ٢٠٠٢ ميلادي

الوحدة الأولى

١

مقدمة لدراسة الإحصاء

(١-١) تعريف علم الإحصاء.

(١-١-١): أهمية دراسة الإحصاء.

(١-١-٢) : الفئات المهتمة بدراسته.

(١-٢) جمع البيانات:

(١-٢-١): مصادر جمع البيانات.

(١-٢-٢) : تصميم الاستبيان.

(١-٣) تصنيف البيانات.

(١-٤) طرق جمع البيانات.

(١-٥) أنواع العينات.

(١-٦) أنواع المتغيرات الإحصائية.

تمارين الوحدة الأولى.

الوحدة الأولى

مقدمة لدراسة الإحصاء

(١-١) علم الإحصاء:

ما هو علم الإحصاء، ما أهمية دراسته، وما هي الفئات المهتمة به، هذا ما سنتناوله في هذا البند.

فعلم الإحصاء هو "العلم الذي يبحث في جمع البيانات وعرضها وتبويبها وتحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير أو التحقق".

فعلم الإحصاء كبقية العلوم لأنه يمتاز بالمراحل الأربعة التي تمتاز بها بقية العلوم وهي:

١- **المشاهدة أو الملاحظة:** فعالم أو الباحث يشاهد ويلاحظ ما يحدث ويجمع الحقائق المتعلقة بالمشكلة التي يود أن يبحثها.

٢- **الفرضية:** لتفسير الحقائق للمشاهدة، إذ يريد العالم أن يفسر الظاهرة التي شاهدها على شكل تخمينات تسمى فرضية أي بمعنى يخمن ويفترض تفسيراً للظاهرة.

٣- **التنبؤ:** يستنتج العالم من فرضياته بعض الحقائق الجديدة والتي يمكن اعتبارها معرفة جديدة (يطلق عليها اسم التنبؤ).

٤- **التحقق:** وهي مرحلة التأكد من صحة الفرضية التي فسر بها المشكلة.

ويقسم علم الإحصاء إلى قسمين رئيسيين هما:

١- الإحصاء الوصفي: وهو الإحصاء الذي يهتم بجمع البيانات وتبويبها وعرضها ثم إجراء الحسابات اللازمة للوصول إلى المقاييس المختلفة التي تبرز الخصائص الأساسية ويهدف الإحصاء الوصفي إلى تقدير معالم المجتمع الإحصائي للوصول إلى استنتاجات.

٢- الإحصاء الاستنتاجي أو الاستدلالي: وهو الإحصاء الذي يهتم بتحليل البيانات

واستخدام النتائج ثم تفسيرها واستعمالها لاتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد أي اتخاذ أفضل قرار ممكن عندما تكون المعلومات المتوافرة غير كافية لذلك يطلق عليه البعض "علم القرارات" ويبدأ حين ينتهي الإحصاء الوصفي.

الطريقة الإحصائية:

"هي مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تستخدم في جمع البيانات وتبويبها وعرضها واستخلاص النتائج وتفسيرها:" لذلك فإن الطريقة الإحصائية تتكون من عناصر تعتبر وسائل وأدوات هامة في البحث العلمي والعناصر هي:

١- جمع البيانات: وهي عملية الحصول على القياسات أو التعدادات أو قيم المشاهدات للتجارب التي يجريها الباحث وكلما كانت دقيقة كلما كانت النتائج أدق.

٢- تبويب (تنظيم) البيانات وعرضها: يتم تبويب البيانات طبقاً لأسلوب تصنيف محدد مسبقاً وعرضها بطرق مناسبة كالجداول، الأشكال البيانية والهندسية.

٣- وصف البيانات عن طريق إبراز الخصائص الأساسية لها والتي يمكن التعبير عنها بمقاييس معينة والخصائص الأساسية لأي مجموعة من البيانات هي: (أ) الشكل (ب) النزعة المركزية (جـ) التشتت.

٤- تحليل النتائج: وهو إظهار الخصائص الأساسية على شكل أرقام والتي يهم الباحث الحصول عليها للوصول إلى نتائج محددة.

٥- استقراء النتائج واتخاذ القرارات: وهي مجموعة الاستنتاجات التي يتوصل إليها الباحث من تحليل النتائج وهي غالباً ما تكون على شكل تقديرات أو تنبؤات أو تعميمات أو قرارات رفض أو قبول للفرضيات الإحصائية.

(١-١-١) أهمية دراسة الإحصاء:

تكمن أهمية الإحصاء في حقيقة بأنه وسيلة لا غاية وفي الحقيقة فإن الإحصاء يلعب دوراً هاماً في:

١- المساعدة في تخليص البيانات واستخلاص النافع منها.

٢- المساعدة في اكتشاف نماذج في البيانات.

٣- المساعدة في تخطيط وتصميم التجارب وعمل المسح الإحصائي.

٤- يساعد في اختيار أسلوب معين في البحث ويساعد على التفاهم بين العلماء.

٥- يساعد على كيفية استخدام نتائج البحث الإحصائي إذ تستخدم النتائج في النواحي التالية:

أ - التنبؤ أو استخدام النتائج في تقدير رقمي لبيان غير معروف بالتحديد وقد يكون هذا لفترات زمنية مستقبلية أو ماضية.

ب- اتخاذ قرار محدد اتجاه المشكلة واتخاذ القرار ما هو إلا عملية اختيار البديل المناسب من عدة بدائل.

جـ- التحقق: التثبت من صحة أو عدم صحة فرضية ما.

د - الرقابة: على مدى الجودة في الصناعة بالإضافة إلى الرقابة الكمية فيها.

(١-١-٢) الفئات المهتمة بدراسة الإحصاء:

أصبح الإحصاء في الزمن الحاضر يستعمل كوسيلة عملية لتحليل المشكلات موضوعياً ولخدمة العاملين في شتى مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بأدوات تحليلية تساعدهم على تحقيق فهم أفضل للأوضاع القائمة سواء في المشروع أو المجتمع أو شتى مجالات الحياة وبالتالي يستطيعون الوصول لأفضل قرار الذي يساعدهم في الرقابة والتنبؤ للمستقبل والتخطيط له وأصبح الإحصاء يطبق في مختلف العلوم الطبية والهندسية والطبيعية والاقتصادية والإدارية، لذلك فإننا نستطيع أن نقول ليس هنالك مجال من مجالات الحياة إلا ويخدمه الإحصاء.

(١-٢) جمع المعلومات (البيانات):

إن عملية جمع البيانات هي نقطة البداية لتصنيفها وتحليلها واستنتاج النتائج بعد أن يكون الباحث قد حدد موضوع البحث بشكل دقيق وواضح، وتعتبر عملية جمع البيانات أول وأهم خطوة من خطوات الطريقة الإحصائية لأنه إذا حدثت أخطاء في هذه العملية فإن عمليتي التحليل والاستنتاج ستكون خاطئتين مهما بذل الباحث من عناية وجهد أثناء هاتين العمليتين.

(١-٢-١) مصادر جمع المعلومات:

يمكن تقسيم مصادر جمع المعلومات إلى قسمين رئيسيين هما:

أ - المصادر المباشرة للمعلومات: وهي الوحدات الرئيسية التي تجمع البيانات عنها

ومثال ذلك قد يسأل الباحث طلبة إحدى التخصصات عن رغبتهم في التخصص الذي يدرسونه، فالطلبة هنا مصادر مباشرة لهذه المعلومات وتمتاز المصادر المباشرة بأن المعلومات التي تم الحصول عليها يمكن التثبت من صحتها ومراجعتها لكن يعاب عليها أنها مكلفة من حيث المال والجهد والوقت.

أما أساليب جمع البيانات من مصادرها المباشرة فهي:

١- الاتصال الشخصي: يتم الاتصال الشخصي المباشرة عن طريق المقابلة الشخصية وفي هذه الحالة يجب على الباحث الانتقال إلى الشخص التي تتم المقابلة معه وجمع المعلومات منه ويمتاز الاتصال الشخصي بما يلي:

- الحصول على إجابات الأشخاص الذين تتم مقابلتهم.
- قيام الباحث بتوضيح أي غموض أو التباس قد يكون موجوداً في الأسئلة، مما يجعل الإجابات أكثر دقة.

لكن يعاب على الاتصال الشخصي ما يلي:

- التحيز: الذي قد ينشأ بسبب جامع المعلومات غير المؤهل تأهيلاً جيداً أو ربما يؤثر الباحث بوجهة نظره على الأشخاص الذين ستتم مقابلتهم.
- الوقوع في بعض الأخطاء أثناء تدوين الإجابات.

٢- الاتصال الهاتفي: ويتم جمع المعلومات عن طريق الاتصال الهاتفي مع الأشخاص وطرح الأسئلة عليهم وتمتاز هذه الطريقة بأنها أقل كلفة من المقابلة الشخصية، لكن يعاب عليها بأنها تقتصر على الأشخاص الذين لديهم هواتف.

٣- الاستبيان: والاستبيان هو رزمة من الأوراق تحتوي على مجموعة من الأسئلة يطلب الباحث من الأشخاص المرسل إليهم الاستبيان عن طريق البريد [الاستبيان البريدي] أو أي طريقة أخرى للإجابة عن هذه الأسئلة ويمتاز الاستبيان بأنه أقل كلفة من الأساليب السابقة لكن يعاب عليه أن هنالك ربما عدد من الأشخاص لن يجيبوا عليه وبالتالي عدم رده إلى الباحث.

٤- المشاهدة المباشرة: وهنا يتم جمع البيانات أما بالمشاهدة الشخصية أو باستعمال أدوات إلكترونية ومثال ذلك إذا أراد باحث معرفة مدى إقبال طلبة الجامعة

على ارتياد الصالة الرياضية الخاصة بالجامعة فيجلس الباحث ويشاهد ذلك أو ربما يراقب ذلك بشكل إلكتروني.

ب- **المصادر غير المباشرة:** فالمصادر غير المباشرة للمعلومات هي جهات مختصة تجمع المعلومات عن المشكلة موضوع الدراسة ويمكن الحصول على المعلومات منها دون الرجوع إلى المصادر المباشرة للمعلومات فمثلاً إذا أردنا معلومات عن الولادات والوفيات خلال فترة زمنية معينة فيمكن الحصول عليها من دائرة الأحوال المدنية وهكذا.

(١-٢-٢) تصميم الاستبيان:

يجب بذل عناية فائقة في تصميم الاستبيان بحيث تكون الأسئلة الواردة فيه ذات صلة وثيقة بالظاهرة موضوع الدراسة ولغتها سليمة لكي تكون المعلومات المدلى بها صحيحة ودقيقة. وهنالك أمور يجب مراعاتها عند تصميم الاستبيان:

١- أن يكون الاستبيان من النوع المختصر المفيد بمعنى أن يحتوي على عدد أقل ما يمكن من الأسئلة، حتى لا يصيب الشخص أثناء تعبئة الاستبيان الملل فيلجأ إلى التسرع وعدم الدقة في الإجابات.

٢- يجب تجربة الاستبيان للتأكد من صلاحيته.

٣- يجب أن يراعى توارد الأسئلة وتسلسلها وأن تكون الأسئلة جذابة.

٤- يجب على الباحث التنبيه بأن المعلومات هي سرية للغاية والهدف منها إحصائي فقط.

٥- يجب أن تكون الأسئلة العددية من النوع البسيط والذي لا يحتاج إلى عمليات حسابيه معقدة وأن لا تعتمد على الذاكرة.

٦- يجب الابتعاد عن الأسئلة التي تقود القارئ إلى ما يريده الباحث.

أنواع الأسئلة (الاستبيان):

أ - الأسئلة الثنائية: وهي الأسئلة التي تحتمل أحد أمرين فقط مثل أسئلة الصواب والخطأ وتمتاز هذه الأسئلة بأنها سهلة الأعداد والإجابة والتقييم لكن يعاب عليها بأنها تسهل الأمور أكثر مما يجب.

ب- أسئلة الاختيار من متعدد: وهذه أفضل من الأسئلة الثنائية إذا أنها تعطي عدة

بدائل ممكنة لكنه يجب أن يراعى فيها أن تغطي جميع الإمكانات.

جـ- الأسئلة المفتوحة: وهي الأسئلة التي تترك للمجيب حرية التعبير عن رأيه دون قيد لكن من مساوئ هذه الأسئلة يصعب التقييم أثناء عملية تحليلها (تحليل الإجابات).

(١-٣) تصنيف البيانات:

أن كبر حجم البيانات وتعدد أرقامها يشكل صعوبة كبيرة تحول دون فهمها والتوصل إلى نتائج مهمة عنها لذلك تصنف البيانات بتبويبها وفق نظام معين في مجموعات متجانسة بهدف تلخيصها ووضعها في حجم مناسب من أجل فهمها وتحليلها.

أن عملية تصنيف البيانات يجب أن يعتمد على نظام يتم بموجبه تصنيف المعلومات وتبويبها وحتى يكون هذا النظام المعتمد في عملية التصنيف نظام ناجح يجب أن يتمتع بخواص هي:

١- عدم التداخل: يجب ألا تتداخل المجموعات التي تقسم إليها البيانات مع بعضها البعض بمعنى أنه يجب أن لا يوجد إلا مكان واحد للمفردة الواحدة في النظام.

٢- الشمولية: بمعنى يجب أن تجد كل مفردة من المفردات مكاناً لها ضمن إحدى مجموعات النظام.

٣- الاستمرارية في تطبيق الأساس المستخدم في التصنيف: بمعنى أنه إذا اتبع أساس معين كالأساس الزمني فيجب الاستمرار في تطبيق هذا الأساس في تصنيف كل مفردات المجتمع الواحد.

هناك أسس لعملية تصنيف البيانات تتوقف على طبيعة البيانات المراد تبويبها وما الهدف من استخدامها بعد عملية التبويب وهي:

أ - الأساس الزمني: ويعتمد على أساس الزمن في تصنيف المعلومات كأن تصنف أعداد المقبولين في الجامعة على السنة التي تم قبولهم فيها.

ب- الأساس الجغرافي: ويتم تصنيف المعلومات بناء على الموقع الجغرافي كأن يتم تصنيف الطلبة المقبولين في الجامعات بناء على موقع الجامعة.

جـ- الأساس الكمي: ويتم تصنيف المعلومات فيه بناءاً على العدد ضمن ظاهرة

معينة كأن يتم تصنيف الطلبة المقبولين في الجامعات بناء على عددهم خلال فترة زمنية معينة.

د - الأساس النوعي: ويتم التصنيف بناء على هذا الأساس حسب النوع تبعاً لاختلاف خواص المفردة كأن يتم تصنيف المقبولين في الجامعات تبعاً للجنس (ذكر أو أنثى) أو الجنسية (أردني، سوري، ...).

هـ- الأساس المشترك: ويتم تصنيف البيانات حسب أكثر من أساس كأن يصنف الطلبة المقبولين في الجامعة حسب زمن دخولهم الجامعة والجامعة التي قبلوا فيها والجنس (ذكر أو أنثى) وأعدادهم.

(١-٤) طرق جمع البيانات الإحصائية:

يتم جمع البيانات الإحصائية بإحدى الطرق التالية:

١- طريقة المسح الشامل: وهنا تجمع البيانات الإحصائية من جميع أفراد المجتمع الإحصائي دون استثناء وتمتاز هذه الطريقة بأنها تعطي صورة مفصلة عن جميع أفراد المجتمع الإحصائي وبأنها لا تحتوي أخطاء سببها استثناء بعض عناصر المجتمع الإحصائي.

٢- طريقة العينة: وهنا تجمع البيانات من مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي وتعميم النتيجة من الجزء على الكل. لكن هنالك حالات يتعذر فيها المسح الشامل فنستخدم طريقة العينة منها:

(I) فساد عناصر المجتمع الإحصائي فمثلاً إذا أردنا فحص دم مريض فإنه من المستحيل أن نقوم بأخذ دم المريض بأكمله ونجري عليه الفحص لأن ذلك يؤدي إلى وفاة المريض، لذا فإنه في هذه الحالة نأخذ عينة من الدم.

(II) عندما لا تتوافر جميع عناصر المجتمع الإحصائي، فمثلاً إذا أردنا دراسة كميات الأمطار التي سقطت في المملكة منذ عام ١٩٢٥ حتى الآن من أجل التعرف على أثرها على كميات إنتاج الحبوب في المملكة في تلك الفترة الزمنية، فقد يكون من المتعذر الحصول على سجلات عن كافة مناطق المملكة، لكل من كميات الأمطار وإنتاج الحبوب أو لأحدها.

(III) الجهد والوقت والتكاليف: لأن كل دراسة إحصائية مرتبطة بهذه الظروف.

(VI) يحتاج المسح الشامل إلى عدد كبير من الأشخاص لجمع البيانات الإحصائية وينتج عن ذلك أخطاء متعددة الأسباب منها الفروق الفردية بين العاملين وبالتالي أخذ عينة بواسطة عدد قليل من المختصين سبب من أسباب تقليل الأخطاء وبالتالي يؤدي إلى نتائج أكثر دقة.

(V) عندما يكون المجتمع متصلاً، كأن تكون مجموعة عناصره غير قابلة للعد مثل مخزون المملكة من الغاز الطبيعي ولمعرفة هذا المخزون يجب التنقيب جميع الأراضي التابعة للمملكة وهذا الأمر غير ممكن عملياً لذلك نقوم بأخذ عينة من تلك الأراضي وإجراء عملية التنقيب فيها.

(١-٥) أنواع العينات:

للعينات أنواع كثيرة فهنالك عوامل تتحكم في تحديد نوع العينة المستخدمة منها:

- طبيعة المشكلة أو الظاهرة المراد دراستها.
- التباين بين مفردات المجتمع الإحصائي.
- الاستخدامات المتوقعة للنتائج التي نحصل عليها نتيجة الدراسة.

وبناء على هذه العوامل يمكن تصنيف العينات إلى نوعين هما:

١- العينة الغرضية أو العمدية: ويتم سحب هذه العينة بعناية وحسب غرض الدراسة وتستخدم في الحالات التي يريد الباحث الحصول على فكرة سريعة عن مشكلة معينة أو لاختبار الاستبيان الإحصائي للتأكد من صلاحيته وتعديل الأخطاء إن وجدت وقد يستخدم هذا النوع من العينات في الأبحاث المتعلقة بالمال لقلة التكاليف والجهد والوقت رغم تعرضها لنوع من التحيز.

٢- العينات العشوائية: والعينة العشوائية هي أي جزء من المجتمع الإحصائي بحيث يكون لكل مفرده من مفردات المجتمع نفس الفرصة في الظهور.

ويمكن تصنيف العينات العشوائية إلى نوعين هما:

أ - العينة العشوائية غير المحددة وهي العينة العشوائية البسيطة.

ب- العينات العشوائية المحددة وتشمل الأنواع الأخرى وهي الطبقية، العنقودية، المنتظمة والمعيارية.

وسنأتي بشيء من التفصيل بشرح هذين النوعين من العينات:

أ - العينة العشوائية البسيطة:

فيتم اختيار العينة العشوائية البسيطة طبقاً لحجم المجتمع الإحصائي.

١- إذا كان حجم المجتمع صغيراً حيث يكون حجمه أقل من أو يساوي (٢٥) مفرده نقوم بإعطاء كل مفردة من مفردات المجتمع بطاقة مسجل عليها رقم بحيث تكون هذه البطاقات متشابهة من حيث المظهر ثم نقوم بخلط تلك البطاقات جيداً ومن ثم سحب عينة منها بالحجم الذي نريده.

٢- إذا كان حجم المجتمع كبيراً فإنه من الصعب اتباع الأسلوب السابق، لذا سنلجأ إلى استخدام جدول الأعداد العشوائية حيث نقوم بترقيم مفردات المجتمع من ١← م (حيث م حجم المجتمع) والمثال التالي يوضح ذلك: لنفترض بأن لدينا مجتمع مكون من (٥٠٠) موظف وأردنا اختيار عينة مقدارها (٢٠) موظف فإننا نعمل على النحو التالي:

- نعطي الموظفين أرقاماً متسلسلة من ١-٥٠٠ على الشكل التالي:
  ٠٠٠ ، ٠٠١، ٠٠٢، .... ، ٥٠٠ أي أن كل رقم مكون من ثلاثة منازل.
- ننظر في جدول الأعداد العشوائية الموجودة في نهاية الكتاب، فنجد الأعداد مكونة من خمسة منازل فنحذف منزلة الآحاد والعشرات فتصبح مكونة من ٣ منازل ونقرأ الأرقام من أعلى إلى أسفل ونكتب الأرقام التي تقل عن (٥٠٠) أو تساويها حتى ينتهي العمود ثم ننتقل إلى العمود الآخر حتى يصل عدد الأرقام التي تم اختيارها إلى (٢٠) رقماً مع مراعاة عدم تكرار أي رقم اختير سابقاً. والأرقام التي تم اختيارها هي: ٤٣١، ١٥٨، ٤٩١، ١٤٦، ٤٧٢، ٢٠٥، ٣٨٧، ٣٢، ٤٥٩، ٥٨، ٣٢٥، ١٩٩، ١٤٠، ١١٨ ، ٢٤٠، ٤١٩، ١٦١، ٣٥٧، ٣٨٧، ٤٦٦.

ب- العينات العشوائية المحددة:

وهي العينات التي تعطى لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متكافئة في الاختيار لكن بعض المفردات قد يتم حرمانها ويمكن تصنيفها إلى الأنواع التالية:

١- العينة الطبقية: حيث يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى فئات متجانسة ويتم اختيار جزء من العينة من كل فئة يتناسب وحجم تلك الفئة وطبقاً لهذا الأسلوب في الاختيار فإن كل مفردة لها فرصة الظهور في العينة رغم أن العينة قد صممت بشكل يتيح التمثيل النسبي لكل فئات المجتمع.

فلو فرضنا بأن لدينا مجتمع إحصائي حجمه يساوي م وقسم هذا المجتمع إلى الفئات $ف_1$، $ف_2$، ....، $ف_ن$ بحيث أن حجم الفئة $ف_1=م_1$، حجم الفئة $ف_2=م_2$، ....، حجم الفئة $ف_ر=م_ر$ شريطه أن $م_1 + م_2 + ... + م_ر = م$.

وأردنا اختيار عينة حجمها= ك من هذا المجتمع بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة فإننا نتبع الأسلوب التالي:

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة } ف_{جـ} = \frac{\text{حجم الفئة } ف_{جـ}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة الكلي}$$

$$ك_{جـ} = \frac{م_{جـ}}{م} \times ك$$

والمثال التالي يوضح ذلك: مجتمع حجمه (٥٠٠٠) مفردة:

قسم إلى الفئات التالية:

- الفئة أ وتساوي (١٠٠٠) مفردة.
- الفئة ب وتساوي (٢٠٠٠) مفردة.
- الفئة جـ وتساوي (١٥٠٠) مفردة.
- الفئة د وتساوي (٥٠٠) مفردة.

وأردنا سحب منه عينة عشوائية بحيث يكون عدد مفرداتها يساوي (١٪) من مجموع مفردات المجتمع بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة؟ كيف يتم سحب مثل هذه العينة.

الحل: أن حجم العينة الكلي = (٠,٠١)× ٥٠٠٠ =٥٠ مفردة.

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة أ} = \frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠} \times ٥٠ = ١٠ \text{ مفردات}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة ب} = \frac{٢٠٠٠}{٥٠٠٠} \times ٥٠ = ٢٠ \text{ مفردة.}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة جـ} = \frac{١٥٠٠}{٥٠٠٠} \times ٥٠ = ١٥ \text{ مفردة.}$$

$$\text{حجم العينة المسحوبة من الفئة د} = \frac{٥٠٠}{٥٠٠٠} \times ٥٠ = ٥ \text{ مفردات.}$$

ويجدر الملاحظة بأن هذا النوع من العينات يؤخذ فيه عندما يشعر الباحث بأن نتيجة الدراسة قد تعتمد على الجنس أو العمر أو مكان الولادة... الخ .

٢- العينة العنقودية (متعددة المراحل) وهي بديل للعينة الطبقية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي. وفي هذا النوع من العينات يتم تقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة يسمى كل منها عنقوداً. فمثلاً إذا أردنا دراسة حول إتقان طلبة إحدى الجامعات لاستخدام الحاسوب حيث نقوم بتقسيم الجامعة إلى الكليات المختلفة الآداب ، العلوم ، الاقتصاد والعلوم الإدارية، الزراعة، الهندسة ... ومن ثم الكليات إلى تخصصات تغطي الجامعات وتعتبر هذه التخصصات هي عناصر المجتمع الإحصائي وكل وحدة من هذه المجموعات تسمى عنقوداً ثم نقوم بلختيار عينة من تلك التخصصات ونجري الدراسة عليها.

٣- العينة المنتظمة: وهي بديل آخر من بدائل العينة العنقودية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي. ومثال ذلك إذا أردنا معرفة مدى رضى الطلبة عن الخدمات التي تقدمها مكتبة الجامعة فإنه يمكننا أن نجلس طالب على مدخل الجامعة ونطلب منه أن يسأل كل سابع طالب يدخل إلى الجامعة وتسجيل آراءه حول هذا الموضوع.

ويجدر بالملاحظة بأن هذا فيه عشوائية إذا أنه ليس معروفاً مسبقاً الطلبة الذين سنسألهم حول الموضوع وانتظام هذا النوع أننا نسأل كل سابع طالب.

٤- العينة المعيارية: وهي تلك العينة التي تتفق مع المجتمع الإحصائي من حيث مقاييسه الإحصائية كالوسط والوسيط والانحراف المعياري وتختار مثل هذه العينات بطريقة تتابعية. فمثلاً إذا أردنا تقدير نسبة نجاح عملية معينة، فإننا لن نختار مثل هذه العينات بطريقة عشوائية ونجري مثل هذه العملية لأناس أصحاء بل أن المرضى يراجعون المستشفى ومن هم بحاجة إلى العملية نجري لهم العملية فتقدر نسبة النجاح لأول عشرة مرضى ثم لأول عشرين مريض حتى تستقر النسبة وبعدها نعمم النتيجة. فقد لاحظنا بأن هذه العينة قد اختيرت بعناية ودقة وبشكل تتابعي.

(١-٦) أنواع المتغيرات الإحصائية:

عند إجراء أي دراسة إحصائية، فإننا نصادف متغيرات من أنواع مختلفة فمثلاً درجة الحرارة تعطى كأعداد إلى درجة معينة من الدقة، بينما هنالك متغيرات ليست عددية وأمثلة ذلك الجنس (متغير ثنائي لأنه يأخذ إحدى حالتين أما ذكر أو أنثى)، الجنسية، لون العيون، الرتب العسكرية.

وبناءاً على ما تقدم يمكن تعريف المتغير بأنه ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها.

ويمكن تصنيف المتغيرات بناءاً على:

١- مجال ذلك المتغير وهو مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، ويقسم مجال المتغير إلى قسمين.

أ - إذا كان مجال المتغير مجموعة منتهية أو مجموعة قابلة للعد، ففي هذه الحالة نسمي المتغير متغير منفصل وأمثلة ذلك: أعداد الأطفال في أسرة، لون العيون، الرتب العسكرية، مكان الولادة، رواتب الموظفين، أعمار المعلمين في المرحلة الابتدائية، الرتب الأكاديمية، الدرجة العملية ... الخ.

ب-إذا كان مجال المتغير فترة سمي المتغير متغير متصل. وأمثلة ذلك: درجة الحرارة، الوزن، الطول، العمر، شدة الصوت وغيرها.

٢- تدريج القياس المستخدم: بناءاً على التدريج المستخدم تصنف المتغيرات إلى صنفين هما:

أ - متغيرات نوعية (وصفية): وهي المتغيرات التي لا يمكن قياسها رقمياً والتدريج المستخدم لقياسها يقسم إلى قسمين:

١- التدريج الأسمي، يستخدم هذا التدريج للحكم على كون المشاهدتين متساويتين أم لا وأمثلة ذلك لون العيون، الجنسية، مكان الولادة وغيرها.

فلو أخذنا شخصين ونظرنا إلى مكان ولادتهما نستطيع الحكم على كون مكان الميلاد نفسه أم لا وتسمى عادة البيانات المقاسة بهذا التدريج بيانات أسمية. لكن هذا التدريج لا يسمح بالمفاضلة فمثلاً إذا كان جنسية شخص أردني وآخر سوري فهذا لا يعني بأن الشخص الأول أفضل من الثاني بل فقط يعني

بأنهم مختلفان في الجنسية فقط.

٢- التدريج الترتيبي: هذا التدريج أفضل من التدريج الأسمي يسمح بالمفاضلة أي ترتيب العناصر وفق سلم معين وأمثلة ذلك الرتب العسكرية، الرتب الأكاديمية، المستوى الأكاديمي، المؤهل العلمي فهذه البيانات ذات طبيعة غير عددية لكن يمكن ترتيبها وفق ترتيب هرمي فمثلاً الرتب الأكاديمية يمكن ترتيبها من الرتبة العليا إلى الدنيا كالتالي: أستاذ، أستاذ مشارك، أستاذ مساعد، مدرس، محاضر. ويطلق عادة على البيانات المقاسة بهذا التدريج بيانات ترتيبية.

ب- متغيرات كمية: وهي المتغيرات التي يمكن قياسها رقمياً والتدريج المستخدم لقياسها يصنف إلى صنفين:

١- التدريج الفئوي: وهذا التدريج يسمح لنا بإعطاء معنى لمقدار الفارق بين المشاهدتين وأمثلة ذلك درجة الحرارة المئوية.

فمثلاً درجة الحرارة ٣٠° مئوية أكبر من درجة الحرارة ٢٠°.

٢- التدريج النسبي: هذا التدريج بالإضافة لخواص التدريج الفئوي يسمح لنا بإعطاء معنى لنسبة المشاهدة الأولى إلى الثانية ومن أهم معانيه بأنه يعطي معنى للصفر المطلق. وأمثلة ذلك: الطول، الوزن، العمر، ودرجة الحرارة المطلقة وعدد الأطفال عند عائلة. فمثلاً إذا كان لدينا شخص وزنه (١٠٠) كغم وشخص آخر وزنه (٥٠) كغم فإننا نقول بأن الشخص الأول من وزنه ضعف الشخص الثاني، لكن عندما نقول بأن درجة الحرارة ٤٠° مئوية ودرجة الحرارة ٢٠° فهذا لا يعني بأن درجة الحرارة الأولى هي ضعف الثاني في الأثر ولكن أكبر منها.

تمارين الوحدة الأولى

س١ : عرف المصطلحات التالية:

علم الإحصاء، المشاهدات، الإحصاء التحليلي، العينة، المجتمع الإحصائي، المتغير، التدريج النسبي، مجال المتغير، العينة الغرضية، الاستبيان، المسح الشامل.

س٢: اذكر ثلاثة أسباب لاختيار العينات؟

س٣ : استعمل جدول الأرقام العشوائية لاختيار عينة حجمها (١٥) من مجتمع يتكون من (٢٥٠٠) شخصاً مستعملاً أسلوب العينة العشوائية البسيطة.

س٤: صنف المتغيرات التالية حسب مجال المتغير ثم حسب التدريج المستخدم. درجة الحرارة المئوية، درجة الحرارة المطلقة، الجنس، الجنسية، الديانة، عدد الأطفال عند أسرة، عدد الزوجات عند شخص، الطول، الوزن، عدد الطلاب في المراحل المدرسية المختلفة، عدد الحوادث على الطريق الصحراوي، كميات الأمطار، أعمار المعلمين في مدرسة ابتدائية، الرتب العسكرية، رواتب الموظفين. أرقام لوحات السيارات، أرقام قاعات التدريس، شدة التيار الكهربائي.

س٥: مجتمع جامعي مؤلف من (١٥٠٠٠) شخص قسّم إلى الفئات التالية:

حملة درجة الدكتوراه (٥٠٠).	جملة درجة دبلوم (٥٠٠).
حملة درجة الماجستير (٢٠٠).	حملة الثانوية العامة (٣٠٠).
حملة درجة البكالوريوس (١٥٠٠).	طلبة (١٢٠٠٠).

يراد تشكيل لجنة لتمثيل الجامعة وذلك بسحب عينة عشوائية بحيث يكون نسبة المعاينة تساوي (١٪) من المجتمع الجامعي.

أ- كيف يتم سحب مثل هذه العينة، بحيث تكون جميع فئات المجتمع ممثلة في العينة.

الوحدة الثانية

٢

عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية

(٢-١) عرض البيانات الإحصائية

(٢-٢) التوزيعات التكرارية.

(٢-٢-١): بناء التوزيع التكراري.

(٢-٢-٢): أنواع الجداول التكرارية.

(٢-٢-٣): التوزيع التكراري المتجمع.

(٢-٣) تمثيل الجداول التكرارية بيانياً.

(٢-٤) تمثيل التوزيعات التراكمية (المتجمعة) بيانياً.

(٢-٥) أشكال التوزيعات التكرارية.

تمارين الوحدة.

عرض البيانات الإحصائية والتوزيعات التكرارية

(٢-١) عرض البيانات الإحصائية:

بعملية تبويب وتصنيف البيانات تصبح الخصائص الهامة لها أكثر وضوحاً. إلا أن استخدام أساليب معينة في عرض البيانات يساعد على زيادة الوضوح في الخصائص وبروزها.

لذا فإن هنالك عدة أساليب لعرض البيانات الإحصائية هي:

١- **العرض الجدولي:** لا توجد طريقة موحدة لعمل الجداول، إلا أن هنالك أسس عامة يجب مراعاتها عند بناء الجدول لتوفير العناصر الأساسية فيه وهي:

١- يجب أن يكون الجدول معنوناً بشكل واضح ومختصر ليعطي فكرة واضحة ودقيقة عما يحويه الجدول.

٢- أن تكون للأعمدة والصفوف عناوين مختصرة ولكنها غير غامضة.

٣- أن ترتب البيانات حسب ترتيبها الزمني أو حسب أهميتها من الناحية الوصفية.

٤- يجب توضيح وحدات القياس المستخدمة.

٥- يجب توضيح المصدر التي أخذت منه المعلومات.

٦- يجب أن يكون هنالك تفسيرات عن سبب شذوذ بعض البيانات إن وجدت.

مثال (١): الجدول (١) التالي يعطي عدد سكان الولايات المتحدة بالمليون للسنوات ١٨٤٠، ١٨٥٠، ...، ١٩٦٠.

السنة	١٨٤٠	١٨٥٠	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠
السكان بالمليون	١٧,١	٢٣,٢	٣١,٤	٣٩,٨	٥٠,٢	٦٢,٩	٧٦	٩٢	١٠٥,٧	١٢٢,٨	١٣١,٧	١٥١,١	١٧٩,٣

المصدر: مكتب التعداد.

٢- **العرض البياني:** ويصنف العرض البياني إلى نوعين هما:

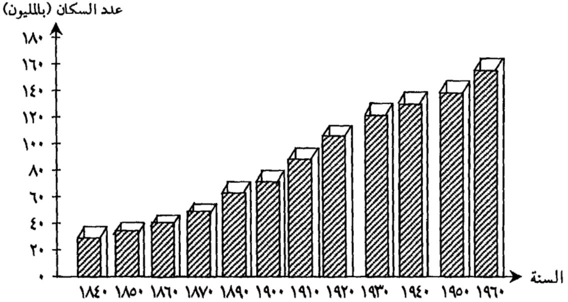
أ - الأعمدة البيانية والمستطيلات: أن عرض البيانات باستعمال الأعمدة (المستطيلات) من أكثر أنواع التمثيل، وتتلخص هذه الطريقة برسم أعمدة (مستطيلات) متساوية القاعدة ولكن ارتفاع كل منها يتناسب مع حجم القيمة التي يمثلها. ونظراً لأن القواعد متساوية فإن مساحات الأعمدة

(المستطيلات) تكون متناسبة مع القيم التي تمثلها ويراعى أن يترك بين كل عمود (مستطيل) وآخر مسافة مناسبة لفصلهما عن بعض.

استعمالاته: تتوقف طريقة عرض البيانات باستخدام الأعمدة أو المستطيلات على نوع وطبيعة البيانات المعروضة واستعمالاته هي:

١- إظهار التطور التاريخي للظاهرة: ففي هذه الحالة يرسم المحور الأفقي بحيث يمثل الزمن فيصبح ارتفاع العمود (المستطيل) يمثل التطور التاريخي.

مثال (٢): أعرض البيانات الواردة في الجدول رقم (١) بطريقة الأعمدة البيانية.



شكل (١)

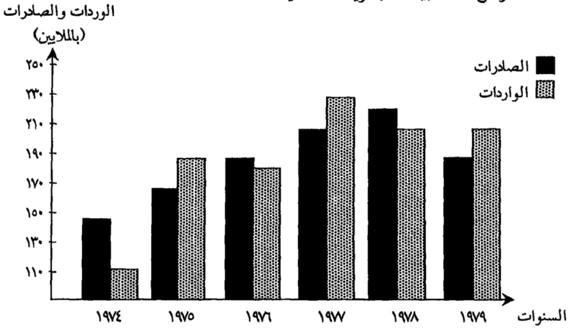
٢- مقارنة بين ظاهرتين أو أكثر: قد تستخدم الأعمدة (المستطيلات) لمقارنة أكثر من ظاهرة وذلك برسم مستطيلات متلاصقة للظواهر المراد مقارنتها في السنوات المختلفة ويشترط أن يميز المستطيلات (الأعمدة) الخاصة بكل ظاهرة.

مثال (٣): فيما يلي الميزان التجاري لإحدى الدول في السنوات (١٩٧٤-١٩٧٩) بملايين الدنانير.

السنة	١٩٧٤	١٩٧٥	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩
الصادرات	١٤٥	١٧٢	١٩٠	٢٢٠	٢٣٠	٢٠٠
الواردات	١١٠	١٩٠	١٨٠	٢٤٠	٢٢٠	٢١٥

جدول رقم (٢).

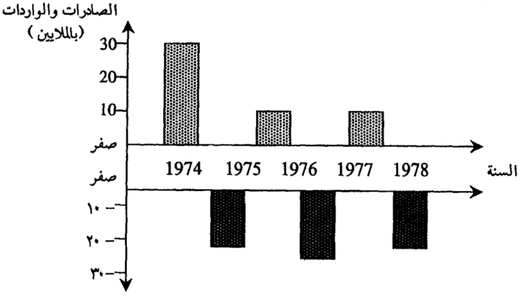
اعرض هذه البيانات بطريقة المستطيلات.



شكل رقم (٢)

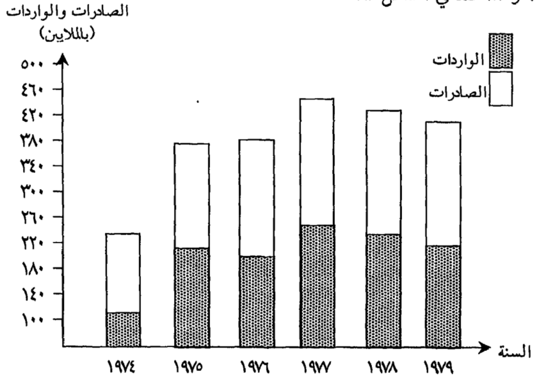
٣- جذب الانتباه إلى اتجاه الأرقام وليس إلى الأرقام ذاتها.

قد يكون الهدف هو إبراز الفرق بالزيادة أو بالنقص بين بيانين وفي هذه الحالة تمثل الزيادة بالمستطيلات بالاتجاه العلوي من المحور أو خط الصفر والنقص في اتجاه السفلي له. والشكل (٣) يبين الفرق بين الصادرات والواردات في المثال رقم(٢).



شكل (٣)

يمكن استخدام طريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزأة البيانية لتحقيق الهدفين (٢) و (٣) كما في الشكل (٤).



شكل (٤)

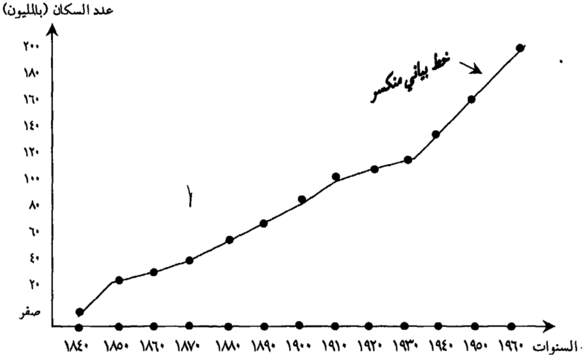
ب- الخط البياني: يستعمل الخط البياني في الحالات التالية:

١- لتمثيل العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين بحيث يبين كيفية تغير إحدى الظاهرتين مع الأخرى أو تبعاً لها كما في الشكل (٥) الذي يبين أعداد سكان أمريكا في السنوات ١٨٤٠، ١٨٥٠، .... ، ١٩٦٠.

٢- للمقارنة بين أكثر من ظاهرة وذلك عن طريق رسم الخطوط البيانية لهذه الظواهر على نفس الشكل. ويسهل عمل ذلك إذا كان هنالك متغير مشترك بين هذه الظواهر مثل الزمن بحيث يخصص المحور الأفقي للمتغير المشترك والشكل (٦) يبين الصادرات والواردات لإحدى الدول في السنوات (١٩٧٤-١٩٧٩).

ومن الجدير بالذكر أن هنالك نوعين من الخطوط البيانية هما:

(I) الخط البياني المنكسر. (II) الخط البياني المنحني.



الشكل (٥)

الشكل (٦)

٣- طريقة الدائرة: تستعمل هذه الطريقة عندما يراد تقسيم الكل إلى أجزائه فيمثل المجموع الكلي بالدائرة كاملة ويمثل كل جزء بقطاع الدائرة حيث تعطى زاوية قطاع الظاهرة بالعلاقة التالية:

$$\text{زاوية قطاع الظاهرة} = \frac{\text{قيمة الظاهرة}}{\text{المجموع الكلي لقيم الظواهر}} \times ٣٦٠° \;......\; (*)$$

ولتوضيح هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال(٣): فيما يلي طلبة إحدى كليات المجتمع التابعة لجامعة البلقاء موزعين كالتالي:

التخصص	تربية خاصة	تربية طفل	خدمة اجتماعية	إدارة	تسويق	محاسبة	المجموع
عدد الطلبة	٣٨	٣٦	٤٠	٤٢	٤٤	٤٠	٢٤٠

المصدر: بيانات افتراضية، الجدول رقم (٣).

اعرض هذه البيانات بطريقة الدائرة.

الحل: أولاً: نحدد زاوية قطاع كل تخصص من هذه التخصصات حسب العلاقة (*):

- زاوية قطاع تخصص التربية الخاصة $= \frac{\text{عدد طلبة التربية الخاصة}}{\text{عدد الطلبة الكلي}} \times ٣٦٠°$

$$= \frac{٣٨}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٥٧°$$

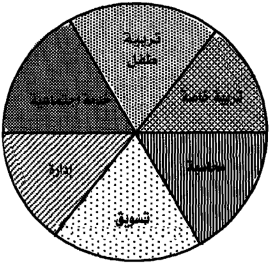
- زاوية قطاع تخصص تربية الطفل $= \frac{٣٦}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٥٤°$
- زاوية قطاع تخصص الخدمة الاجتماعية $= \frac{٤٠}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٦٠°$
- زاوية قطاع تخصص الإدارة $= \frac{٤٢}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٦٣°$
- زاوية قطاع تخصص التسويق $= \frac{٤٤}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٦٦°$
- زاوية قطاع تخصص المحاسبة $= \frac{٤٠}{٢٤٠} \times ٣٦٠° = ٦٠°$

ملاحظة: يجب أن يكون مجموع زوايا القطاعات المختلفة= ٣٦٠° .

وفي مثالنا ٥٧° + ٥٤° + ٦٠° + ٦٣° + ٦٦° + ٦٠° = ٣٦٠° .

ثانيا: نقوم برسم دائرة ونحدد نصف قطر فيها ثم نحدد زاوية كل قطاع. ويكون

التمثيل كما في الشكل (٧).



شكل (٧)

٤- العرض بالطريقة التصويرية: وهي من أكثر الطرق استعمالاً عندما يهدف الباحث إلى جذب انتباه القارئ وينقل إليه الفكرة بصورة واضحة لا تحتاج إلى مستوى علمي معين. فباستخدام الصور والأشكال المعبرة يمكن إيصال البيانات إلى جميع فئات المجتمع في صورة ميسرة على الفهم، جذابة للنظر . وأكثر ما تستخدم في كتب علم النفس، كتب الأطفال، الدعايات والتقارير الحكومية.

مثال (٤): الجدول التالي يبين أعداد خريجي أحد كليات المجتمع التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية خلال الأعوام (١٩٩٧-٢٠٠٠).

السنة	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
أعداد الخريجين	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٥٠

اعرض هذه البيانات بالطريقة التصويرية.

الحل: لنفترض بأن كل (١٠٠) خريج مثلوا بصورة واحدة.

السنة	التمثيل
١٩٩٧	
١٩٩٨	
١٩٩٩	
٢٠٠٠	

(٢-٢) التوزيعات التكرارية:

هي عملية لتصنيف البيانات تصنيفاً كمياً، ويتمتع التوزيع التكراري بالخواص التالية:

١- تصنف المفردات إلى مجموعات متجانسة بحيث تشمل كل مجموعة على عدد من القيم المتقاربة وبحيث لا تنتمي كل مفردة إلا لمجموعة واحدة فقط.

٢- طريقة لاختصار مجموعة من البيانات وتصنيفها بحيث يسهل التعامل معها وصياغتها بأشكال متعددة تلائم الأغراض المختلفة.

٣- مجموع التكرارات يساوي عدد البيانات (المفردات).

مثال (١): إذا كانت البيانات التالية تمثل علامات (٢٠) طالباً في امتحان ما:

١٢	١٢	١٣	١٢	١٤	١٥	٩	٨	٧	١٠
١٠	١٢	١٤	١٥	٦	١٤	١٥	١٠	١٣	١٢

فإن الجدول (١) يمثل التوزيع التكراري لهذه العلامات.

العلامة	التكرار
٦	١
٧	١
٨	١
٩	١
١٠	٣
١١	صفر
١٢	٥
١٣	٢
١٤	٣
١٥	٣
المجموع	٢٠

جدول رقم (١)

ونلاحظ في بناء هذا الجدول أننا بدأنا من أقل قيمة وهي (٦) ورتبنا القيم تصاعدياً حتى وصلنا إلى أكبر قيمة وهي (١٥) كما يظهر في العمود الأول أما عناصر العمود الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت فيها العلامة أما العلامة (١١) التي لم تظهر في البيانات فوضعنا تكرارها صفراً

(٢-٢-١) بناء التوزيع التكراري:

عندما يكون عدد البيانات صغيراً تمكنا من بناء التوزيع التكراري مباشرة كما في المثال (١). أما إذا كان عدد البيانات كبيراً فإنه يجدر بنا في هذه الحالة أن نقسم البيانات إلى فئات. وقبل الخوض في كيفية بناء مثل هذا التوزيع سنعمل على تعريف بعض المصطلحات الواردة فيه.

الفئة: هي مجموعة جزئية محددة بدقة ووضوح وتحوي عدداً من القيم التي يعتقد الباحث أنها شبه متجانسة ويفضل أن تكون هذه الفئات متساوية في الطول.

عدد الفئات: ليس هنالك قاعدة ثابتة لتحديد عدد الفئات المرغوب فيه، لذلك فإن ما يتحكم بعدد الفئات هو مدى البيانات، عدد البيانات وتجانسها ومستوى الدقة المطلوب فمثلاً إذا كان عدد البيانات أكثر من خمسين مفردة فيجب أن يكون عدد الفئات أكبر من أو يساوي عشرة وأقل من عشرين فئة أما إذا كان عدد المفردات أقل من خمسين مفردة فعدد الفئات يجب أن يكون أكبر أو يساوي خمس فئات وأقل من عشرة.

خطوات بناء التوزيع التكراري: سنوضح خطوات بناء التوزيع التكراري من خلال المثال التالي:

مثال(٢): البيانات التالية تمثل علامات (٨٠) طالب في مادة الرياضيات في إحدى الجامعات:

٩٣	٧٦	٨٨	٦٢	٩٠	٦٨	٨٢	٧٥	٨٤	٦٨
٧٥	٨٥	٥٩	٧١	٩٣	٦٠	٧٣	٨٨	٧٩	٧٣
٧٢	٦٣	٧٨	٩٥	٦٢	٧٤	٨٧	٧٥	٦٥	٦١
٦٠	٦٨	٧٤	٦٩	٧٧	٩٤	٧٥	٨٢	٧٨	٦٦
٧١	٨٣	٧٩	٦٠	٩٥	٧٥	٦١	٨٩	٧٨	٩٦
٧٥	٧١	٦٥	٧٦	٨٥	٧٨	٩٧	٦٧	٦٢	٧٩
٧٤	٥٠	٧٦	٦٢	٧٨	٨٨	٥٧	٧٣	٨٠	٦٥
٧٧	٨٥	٧٥	٧٦	٦٣	٧٢	٨١	٧٣	٦٧	٨٦

المطلوب بناء التوزيع التكراري.

١- إيجاد المدى: المدى = أكبر مشاهدة – أقل مشاهدة.

= ٩٧ – ٥٠ = ٤٧

٢-اختيار عدد فئات مناسب: وفي مثالنا سنختار عدد الفئات = ١٠

٣- تحديد طول الفئة وهو عبارة عن المدى مقسوماً على عدد الفئات ثم تقريب الجواب دائماً إلى أعلى بحيث يساوي أو يقل عن عدد الأرقام المعنوية المستعملة في البيانات.

وفي مثالنا طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{٤٧}{١٠} = ٤{,}٧ \cong ٥$

وتم تقريب الجواب لأقرب عدد صحيح (لأن البيانات معطاة لأقرب عدد صحيح).

٤- تحديد الحد الأدنى لأول فئة ويجب أن يكون هذا الحد مساوياً أو أصغر من أقل قيمة من البيانات وأن تكون درجة دقته نفس درجة دقة البيانات المستعملة. وفي مثالنا يكون الحد الأدنى لأول فئة يساوي (٥٠). وبعد ذلك نحدد الحد الأدنى الفعلي لتلك الفئة وهو عبارة عن الحد الأدنى ناقصاً نصف وحدة دقة.

فمثلاً، إذا كانت أعداد البيانات معطاة لأقرب واحد صحيح فإن نصف وحدة الدقة تساوي (٠,٥) أما إذا كانت معطاة لأقرب منزلة عشرية واحدة فنصف وحدة الدقة تساوي (٠,٠٥) أما إذا كانت البيانات معطاة لأقرب منزلتين عشريتين فنصف وحدة الدقة تساوي (٠,٠٠٥). وفي مثالنا يكون نصف وحدة الدقة تساوي (٠,٥) وبالتالي:

الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى = الحد الأدنى للفئة الأولى− $\frac{١}{٢}$ وحدة دقة

= ٥٠−٠,٥= ٤٩,٥

٥- نعين الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى وذلك بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى الفعلي لتلك الفئة ومن ثم نعين الحد الأعلى للفئة الأولى وهو يساوي الحد الأعلى الفعلي ناقصاً نصف وحدة دقة. وفي مثالنا يكون:

الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى = الحد الأدنى الفعلي + طول الفئة

= ٤٩,٥ + ٥ = ٥٤,٥

الحد الأعلى للفئة الأولى = الحد الأعلى الفعلي للفئة − نصف وحدة دقة

= ٥٤,٥ − ٠,٥ = ٥٤

وبهذا نكون قد حصلنا على حدود الفئة الأولى وهي ٥٠−٥٤.

٦- نعين الحدود الدنيا والعليا لجميع الفئات وذلك بإضافة طول الفئة لكل حد ومن ثم نعين الحدود الفعلية بإضافة طول الفئة لكل حد فعلي.

٧- تعيين مراكز الفئات: ومركز الفئة يساوي مجموع حديها مقسوماً على ٢.

وفي مثالنا يكون:

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$$

$$= \frac{٥٠ + ٥٤}{٢} = \frac{١٠٤}{٢} = ٥٢$$

٨- نفرّغ البيانات المعطاة لدينا على الفئات التي أنشأناها وذلك باستعمال خط عمودي لكل قراءة وخط مائل للقراءة الخامسة في كل فئة (حتى تتشكل حزمة) وذلك لتسهيل جمع التكرارات.

وفي مثالنا لا يوجد سوى مفردة واحدة تقع ضمن الفئة (٥٠-٥٤) وهي ٥٣ لذلك نضع أمام الفئة الخط/ (للدلالة أن هنالك مفردة واحدة).

٩- تجمع التكرارات المقابلة لكل فئة ونسجله في عمود التكرارات ومن ثم لجمع التكرارات لجميع الفئات ونقارنه بعدد البيانات فإذا كان عدد البيانات يساوي (ن) فيجب أن يكون مجموع التكرارات يساوي (ن). وفي مثالنا بما أن عدد البيانات يساوي (٨٠) يجب أن يكون مجموع التكرارات يساوي (٨٠).

والجدول رقم (٢) يبين التوزيع التكراري لهذه البيانات.

الفئات	الحدود الفعلية	تفريغ البيانات	التكرار	مركز الفئة
٥٠-٥٤	٤٩٫٥-٥٤٫٥	/	١	٥٢
٥٥-٥٩	٥٤٫٥-٥٩٫٥	//	٢	٥٧
٦٠-٦٤	٥٩٫٥-٦٤٫٥	~~////~~ ~~////~~ /	١١	٦٢
٦٥-٦٩	٦٤٫٥-٦٩٫٥	~~////~~ ~~////~~	١٠	٦٧
٧٠-٧٤	٦٩٫٥-٧٤٫٥	~~////~~ ~~////~~ //	١٢	٧٢
٧٥-٧٩	٧٤٫٥-٧٩٫٥	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	٢١	٧٧
٨٠-٨٤	٧٩٫٥-٨٤٫٥	~~////~~ /	٦	٨٢
٨٥-٨٩	٨٤٫٥-٨٩٫٥	~~////~~ ////	٩	٨٧
٩٠-٩٤	٨٩٫٥-٩٤٫٥	////	٤	٩٢
٩٥-٩٩	٩٤٫٥-٩٩٫٥	////	٤	٩٧
المجمـــوع			٨٠	

جدول (٢)

مثال (٣): البيانات التالية تبين الأقطار بالمليمترات لعينة من (٥٠) من كرات مصنوعة في شركة ما. كون التوزيع التكراري للأقطار.

٧,٢٩	٧,٣٨	٧,٣٥	٧,٣٢	٧,٤٠	٧,٢٤	٧,٤١	٧,٣٥	٧,٣٦	٧,٣٩
٧,٣٧	٧,٣٧	٧,٣٢	٧,٣٥	٧,٣٠	٧,٢٨	٧,٣٣	٧,٣٥	٧,٢٩	٧,٤١
٧,٣٦	٧,٢٨	٧,٤٣	٧,٣١	٧,٢٧	٧,٣٩	٧,٣٨	٧,٤٢	٧,٣١	٧,٣٤
٧,٣٠	٧,٤٥	٧,٣٦	٧,٤٠	٧,٤٦	٧,٣٤	٧,٣٤	٧,٢٥	٧,٣٦	٧,٢٦
٧,٣٢	٧,٣٣	٧,٤٢	٧,٣٥	٧,٣٦	٧,٣٥	٧,٣٢	٧,٣٨	٧,٣٣	٧,٣٦

الحل:

١- المدى = أكبر قطر - أصغر قطر = ٧,٤٦ - ٧,٢٤ = ٠,٢٢

٢- لنختار عدد الفئات = ٦

٣- طول الفئة = $\frac{٠,٢٢}{٦}$ = ٠,٠٣٦٦ ≅ ٠,٠٤

حيث تم التقريب لأقرب منزلتين عشريتين لأن الأقطار درجة الدقة فيها منزلتين عشريتين.

٤- الحد الأدنى للفئة الأولى = ٧,٢٤.

ومن ثم الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى= الحد الأدنى للفئة الأولى - $\frac{١}{٢}$ وحدة دقة.

= ٧,٢٤ - ٠,٠٠٥ = ٧,٢٣٥

٥- الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى = الحد الأدنى الفعلي للفئة + طول الفئة.

= ٧,٢٣٥ + ٠,٠٤ = ٧,٢٧٥

ومن ثم الحد الأعلى للفئة الأولى = الحد الأعلى الفعلي - $\frac{١}{٢}$ وحدة دقة.

= ٧,٢٧٥ - ٠,٠٠٥ = ٧,٢٧

٦- تحديد بقية الحدود للفئات الأخرى.

$$\text{٧- إيجاد مراكز الفئات ومركز الفئة الأولى} = \frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{٧,٢٤} + \text{٧,٢٧}}{\text{٢}} = \text{٧,٢٥٥.}$$

والجدول رقم (٣) يبين التوزيع التكراري لهذه البيانات.

الفئات	الحدود الفعلية	تفريغ البيانات	التكرار	مركز الفئة
٧,٢٤-٧,٢٧	٧,٢٣٥-٧,٢٧٥	////	٤	٧,٢٥٥
٧,٢٨-٧,٣١	٧,٢٧٥-٧.٣١٥	~~////~~	٥	٧,٢٩٥
٧,٣٢-٧,٣٥	٧,٣١٥-٧,٣٥٥	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	١٩	٧,٣٣٥
٧,٣٦-٧,٣٩	٧,٣٥٥-٧,٣٩٥	~~////~~ ~~////~~ ///	١٣	٧,٣٧٥
٧,٤٠-٧,٤٣	٧,٣٩٥-٧,٤٣٥	~~////~~ //	٧	٧,٤١٥
٧,٤٤-٧,٤٧	٧,٤٣٥-٧,٤٧٥	//	٢	٧,٤٥٥

جدول رقم (٣)

التوزيع التكراري النسبي: يتم استخراج التكرار النسبي وفق المعادلة التالية:

$$\text{التكرار النسبي لفئة ما} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

والتوزيع الذي يعطينا الفئات أو مراكزها مع التكرار النسبي يسمى توزيع تكراري نسبي.

مثال (٤): بالرجوع إلى المثال رقم (٢) ابني جدول التكرار النسبي.

الحل:

الفئات	التكرار النسبي
٥٠-٥٤	$\frac{١}{٨٠}$ = ٠,٠١٢٥
٥٥-٥٩	$\frac{٢}{٨٠}$ = ٠,٠٢٥
٦٠-٦٤	$\frac{١١}{٨٠}$ = ٠,١٣٧٥
٦٥-٦٩	$\frac{١٠}{٨٠}$ = ٠,١٢٥
٧٠-٧٤	$\frac{١٢}{٨٠}$ = ٠,١٥
٧٥-٧٩	$\frac{٢١}{٨٠}$ = ٠,٢٦٢٥
٨٠-٨٤	$\frac{٦}{٨٠}$ = ٠,٠٧٥
٨٥-٨٩	$\frac{٩}{٨٠}$ = ٠,١١٢٥
٩٠-٩٤	$\frac{٤}{٨٠}$ = ٠,٠٥
٩٥-٩٩	$\frac{٤}{٨٠}$ = ٠,٠٥
المجموع	١

ويجدر بالملاحظة بأن مجموع التكرارات النسبية يجب أن تساوي واحد.

جدول رقم (٤)

التوزيع التكراري المئوي: يتم استخراج التكرار المئوي لكل فئة وفق المعادلة التالية:

$$\text{التكرار المئوي لفئة ما} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ١٠٠ \%$$

والتوزيع الذي يعطينا الفئات أو مراكزها مع التكرار المئوي يسمى توزيع تكراري مئوي.

مثال (٥): بالرجوع إلى المثال رقم (٣) ابني جدول التكرار المئوي:

الحل:

التكرار المئوي	الفئات
$\frac{٤}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ٨٪	٧,٢٧-٧,٢٤
$\frac{٥}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ١٠٪	٧,٣١-٧.٢٨
$\frac{١٩}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ٣٨٪	٧,٣٥-٧,٣٢
$\frac{١٣}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ٢٦٪	٧,٣٩-٧,٣٦
$\frac{٧}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ١٤٪	٧,٤٣-٧,٤٠
$\frac{٢}{٥٠}\times$ ١٠٠٪ = ٤٪	٧,٤٧-٧,٤٤
١٠٠٪	المجمـــوع

جدول رقم (٥)

ويجدر بالملاحظة بأن مجموع التكرارات المئوية يجب أن تساوي ١٠٠٪.

(٢-٢-٢) أنواع الجداول (التوزيعات) التكرارية:

١- الجدول المنتظم: يكون التوزيع منتظم إذا كان أطوال فئاته متساوية كما في الجدول رقم (٢) &(٣).

٢- الجدول غير المنتظم: يكون التوزيع غير منتظم إذا كان أطوال فئاته غير متساوية كما في المثال التالي:

مثال (٦):

التكرار النسبي	الفئات
٣	٦٥-٦٠
٤	٧٣-٦٦
٥	٨٧-٧٤

جدول (٧)

ملاحظة: هذا التوزيع غير منتظم لأن
طول الفئة الأولى = ٦
طول الفئة الثانية = ٨
طول الفئة الثالثة = ١٤
وبالتالي أطوال الفئات غير متساوية

٣- الجدول المقفل: يكون الجدول مقفلاً عندما تكون بداية الفئة الأولى محددة وكذلك نهاية الفئة الأخيرة محددة كما في المثال رقم (٦). حيث أن بداية الفئة الأولى محدد وتساوي (٦٠) ونهاية الفئة الأخيرة محدد وتساوي (٨٧).

٤-الجدول المفتوح: ويكون الجدول مفتوح إذا كانت بداية الفئة الأولى أو نهاية الفئة الأخيرة أو كليهما معاً غير محدد. كما في المثال (٧).

مثال (٧):

التكرار	الفئات
٣	أقل من ٢٠
٦	٢٠-٣٠
٥	٣١-٤٩

جدول (٨)

التكرار	الفئات
٧	٢٠-٢٥
٨	٢٦-٣١
٦	أكثر من ٣١

جدول (٩)

التكرار	الفئات
٢	أقل من ١٠
٤	١٠-٢٠
١	أكبر من ٢٠

جدول (١٠)

نلاحظ أن الجداول (٨)، (٩) & (١٠) أمثلة على جداول مفتوحة، حيث أن جدول رقم (٨) مفتوح من الأسفل لأن بداية الفئة الأولى غير محددة والجدول رقم (٩) مفتوح من الأعلى لأن نهاية الفئة الأخيرة غير محددة أما الجدول رقم (١٠) مفتوح من الطرفين لأن بداية الفئة الأولى ونهاية الفئة الأخيرة غير محددتين.

(٢-٢-٣) التوزيع التكراري المتجمع (التراكمي):

في كثير من الأحيان نحتاج لمعرفة عدد البيانات (المفردات) التي تساوي أو تقل قيمتها عن حد معين [أو تساوي أو تزيد عن حد معينا]. وللتوصل لهذا النوع من المعلومات نلجأ إلى تكوين الجداول التكرارية التراكمية (المتجمعة) فالجداول المتجمع هو جدول يبين التكرارات المتجمعة لأكثر من فئة واحدة وهنالك نوعين من التوزيعات التراكمية وهي:

(أ) الجدول التكراري التراكمي الصاعد : ويبين مجموع التكرارات للبيانات التي هي أقل أو تساوي حد فعلي معين

مثال (٨): بالرجوع إلى المثال رقم (٢) والجدول (٢) أجب عن الأسئلة التالية:

١- كون الجدول التراكمي الصاعد.
٢- ما عدد البيانات (العلامات) التي تقل عن العلامة ٧٤,٥.
٣- ما عدد العلامات التي تقع بين العلامتين ٥٩,٥، ٨٤,٥.
٤- ما عدد العلامات التي تقل عن أو تساوي العلامة ٧٠.
٥- كون الجدول التراكمي النسبي الصاعد.
٦- ما نسبة العلامات التي تقل أو تساوي العلامة ٨٧.
٧- كون الجدول التراكمي المئوي الصاعد.
٨- ما النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن العلامة ٦٩,٥.

الحل: (١)

الفئات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي الصاعد
٤٥-٤٩	صفر	٤٩,٥	صفر
٥٠-٥٤	١	٥٤,٥	٠ +١=١
٥٥-٥٩	٢	٥٩,٥	١+٢=٣
٦٠-٦٤	١١	٦٤,٥	٣+١١=١٤
٦٥-٦٩	١٠	٦٩,٥	١٤+١٠=٢٤
٧٠-٧٤	١٢	٧٤,٥	٢٤+١٢=٣٦
٧٥-٧٩	٢١	٧٩,٥	٣٦+٢١=٥٧
٨٠-٨٤	٦	٨٤,٥	٥٧+٦=٦٣
٨٥-٨٩	٩	٨٩,٥	٦٣+٩=٧٢
٩٠-٩٤	٤	٩٤,٥	٧٢+٤=٧٦
٩٥-٩٩	٤	٩٩,٥	٧٦+٤=٨٠
المجمـــوع	٨٠		

جدول (١١)

ملاحظات حول الجدول رقم (١١).

أ - أضفنا فئة في بداية الجدول تكرارها صفر لغايات الرسم.

ب- جدول نبدأ فيه بتجميع التكرارات من الأعلى إلى الأسفل للجدول فمثلاً
تكرار التراكمي للفئة الأولى (٥٠-٥٤) = تكرار الفئة الأولى (٥٠-٥٤)=١
تكرار التراكمي للفئة الثانية = تكرار الفئة الأولى + تكرار الفئة الثانية
= ١ + ٢ = ٣ .... وهكذا
بينما تكرار التراكمي للفئة الأخيرة (٩٥-٩٩) = مجموع التكرارات=٨٠.

جـ- يستخدم الجدول لإيجاد عدد المفردات التي تقل أو تساوي مفردة معينة

٢- عدد العلامات التي تقل عن العلامة (٧٤,٥) = التكرار التراكمي الصاعد المقابل لهذه العلامة وبالتالي يساوي ٣٦ وهذا يعني بأن هنالك ٣٦ علامة تقل عن العلامة (٧٤,٥).

٣- عدد العلامات التي تقع بين العلامتين ٥٩,٥، ٨٤,٥ تساوي التكرار التراكمي المقابل للعلامة ٨٤,٥ مطروحاً منه التكرار التراكمي المقابل للعلامة ٥٩,٥ وبالتالي عدد العلامات = ٦٣-٣ = ٦٠.

٤- بما أن العلامة ٧٠ لم ترد في الحـــدود الفعليـة بشـكل صريـح سـنلجأ إلى النسـبة والتناسب كالتالي:

❖ العلامة ٧٠ تقع ضمن الحدين الفعليين ٦٩,٥ ، ٧٤,٥

العلامة		التكرار التراكمي	
٦٩,٥	٠,٥=(٦٩,٥-٧٠)	٢٤	
٧٠	٥=(٦٩,٥-٧٤,٥)	س	١٢=(٢٤-٣٦)
٧٤,٥		٣٦	

وبالتالي $س = ٢٤ + \frac{٠,٥}{٥} \times ١٢ = ٢٤ + \frac{٦}{٥} = ٢٤ + ١,٢ = ٢٥,٢$

وعندئذ هنالك تقريباً (٢٥) علامة تقل عن العلامة (٧٠).

٥- إذا تم استبدال التكرار التراكمي الصاعد بالتكرار النسبي الصاعد فإننـا نحصـل على الجدول التراكمي النسبي الصاعد كما في الجدول رقم(١٢).

الفئات	التكرار النسبي	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي النسبي الصاعد
٤٥-٤٩	صفر	٤٩,٥	صفر
٥٠-٥٤	٠,٠١٢٥	٥٤,٥	٠,٠١٢٥ =٠,٠١٢٥ + ٠
٥٥-٥٩	٠,٠٢٥	٥٩,٥	٠,٠٣٧٥=٠,٠٢٥+٠,٠١٢٥
٦٠-٦٤	٠,١٣٧٥	٦٤,٥	٠,١٧٥=٠,١٣٧٥+٠,٠٣٧٥
٦٥-٦٩	٠,١٢٥	٦٩,٥	٠,٣٠=٠,١٢٥+٠,١٧٥
٧٠-٧٤	٠,١٥	٧٤,٥	٠,٤٥=٠,١٥+٠,٣٠
٧٥-٧٩	٠,٢٦٢٥	٧٩,٥	٠,٧١٢٥=٠,٢٦٢٥+٠,٤٥
٨٠-٨٤	٠,٠٧٥	٨٤,٥	٠,٧٨٧٥= ٠,٠٧٥+٠,٧١٢٥
٨٥-٨٩	٠,١١٢٥	٨٩,٥	٠,٩٠=٠,١١٢٥+٠,٧٨٧٥
٩٠-٩٤	٠,٠٥	٩٤,٥	٠,٩٥=٠,٠٥+٠,٩٠
٩٥-٩٩	٠,٠٥	٩٩,٥	١=٠,٠٥+٠,٩٥

جدول (١٢)

٦- العلامة ٨٧ تقع ضمن الحدين الفعليين ٨٤,٥ ، ٨٩,٥ .

٥	٢,٥	84.5	←	0.7875	٠,١١٢٥
		٨٧	←	س	
		٨٩	←	٠,٩٠	

❖ $س = ٠,٧٨٧٥ + \frac{٢,٥}{٥} \times ٠,١١٢٥ = ٠,٨٤٣٧٥$

أي أن نسبة العلامات التي تقل عن العلامة ٨٧ تساوي (٠,٨٤٣٧٥).

٧- إذا تم استبدال التكرار الصاعد بالتكرار التراكمي المئوي الصاعد لحصل على جدول التراكمي المئوي الصاعد كما في الجدول (١٣).

الفئات	التكرار المئوي	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي المئوي الصاعد
٤٥-٤٩	صفر٪	٤٩,٥	صفر٪
٥٠-٥٤	٪١,٢٥	٥٤,٥	٪١,٢٥
٥٥-٥٩	٪٢,٥	٥٩,٥	٪٣,٧٥
٦٠-٦٤	٪١٣,٧٥	٦٤,٥	٪١٧,٥
٦٥-٦٩	٪١٢,٥	٦٩,٥	٪٣٠
٧٠-٧٤	٪١٥	٧٤,٥	٪٤٥
٧٥-٧٩	٪٢٦,٢٥	٧٩,٥	٪٧١,٢٥
٨٠-٨٤	٪٧,٥	٨٤,٥	٪٧٨,٧٥
٨٥-٨٩	٪١١,٢٥	٨٩,٥	٪٩٠
٩٠-٩٤	٪٥	٩٤,٥	٪٩٥
٩٥-٩٩	٪٥	٩٩,٥	٪١٠٠

جدول (١٣)

٨- النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن العلامة ٦٩,٥ يساوي التكرار المئوي التراكمي المقابل لهذه العلامة. وبالتالي فالنسبة المئوية = ٪٣٠.

ب- الجدول التكراري التراكمي الهابط = وهو الجدول الذي يبين مجموع التكرار للمفردات التي تساوي أو هي أكبر من حد فعلي ما.

مثال(٩): بالرجوع إلى المثال رقم (٣) والجدول رقم (٣) أجب عن الأسئلة التالية:

١- كون الجدول التكراري المتجمع الهابط.

٢- عدد الكرات التي أقطارها تزيد أو تساوي (٧,٣٩٥).

٣- نسبة الكرات التي أقطارها تزيد عن أو تساوي (٧,٤٣٥).

الحل: (١)

الفئات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلي	التكرار التراكمي الهابط
٧,٢٤−٧,٢٧	٤	٧,٢٣٥	0 +٢+٧+١٣+١٩+٥+٤=٥٠
٧,٢٨−٧,٣١	٥	٧,٢٧٥	0 +٢+٧+١٣+١٩+٥=٤٦
٧,٣٢−٧,٣٥	١٩	٧,٣١٥	0 +٢+٧+١٣+١٩=٤١
٧,٣٦−٧,٣٩	١٣	٧,٣٥٥	0 +٢+٧+١٣=٢٢
٧,٤٠−٧,٤٣	٧	٧,٣٩٥	0 +٢+٧=٩
٧,٤٤−٧,٤٧	٢	٧,٤٣٥	٢ + 0 =٢
٧,٤٨−٧,٥١	صفر	٧,٤٧٥	صفر

جدول (١٤)

ملاحظات حول الجدول رقم (١٤):

١- أضفنا فئة في نهاية الجدول تكرارها صفر.

٢- جدول نبدأ فيه بتجميع التكرارات من أسفل الجدول إلى أعلاه.

٣- التكرار التراكمي الهابط للفئة الأولى يساوي مجموع التكرارات.

٤- التكرار التراكمي الهابط للفئة الأخيرة يساوي تكرار الفئة الأخيرة.

٥- يستخدم الجدول لإيجاد عدد التكرارات التي تساوي أو تزيد عن مفردة ما.

٢- عدد الكرات التي أقطارها تزيد أو تساوي (٧,٣٩٥) يساوي التكرار التراكمي الهابط المقابل للقطر (٧,٣٩٥) وبالتالي عدد الكرات = ٩.

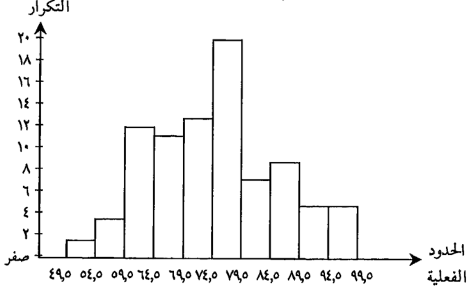
٣- نسبة الكرات التي أقطارها يزيد أو يساوي (٧,٤٣٥) تساوي التراكمي النسبي الهابط ويساوي $\frac{٢}{٥٠}$ = ٠,٠٤.

(٢-٣) تمثيل الجداول التكرارية بيانيا:

هنالك ثلاث طرق رئيسية لتمثيل الجداول بيانياً وهي:

١- المدرج التكراري: وهي عبارة عن تمثيل تكرار كل فئة من فئات التوزيع التكـراري بمستطيل حـدود قاعدتـه الحـدود الفعليـة لتلـك الفئـة وارتفاعـه يتناسـب مـع تكرارها. أي أننا نـأخذ محوريـن متعـامدين نرصـد علـى المحـور الأفقـي الحـدود الفعلية لكل فئة من فئات التوزيع ونقيـم علـى كـل فئـة مستطيـلاً يتنـاسب ارتفاعـه مع تكرار تلك الفئة.

مثال (١٠): بالرجوع إلى الجدول رقم (٢) مثل الجدول باستخدام المدرج التكراري:

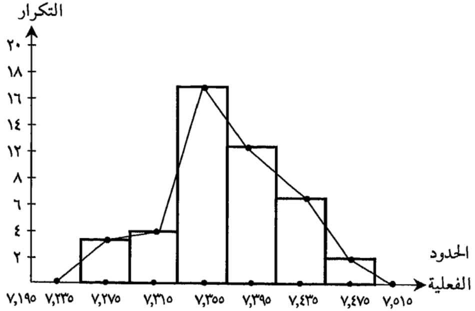


خصائص المدرج: المساحة الكلية له تتناسب مع التكرار الكلي الذي يمثلـه ومسـاحة كل مستطيل تتناسب مع تكرار الفئة الذي تمثله هذه المساحة.

٢- المضلع التكراري: هنالك طريقتان لرسم المضلع التكراري هما:

أ – باستخدام المدرج التكراري: يمكن الحصول على المضلع التكراري بتنصيف القواعد العليا للمستطيلات كنقاط ثم وصـل هـذه النقـاط ويجـب إقفـال المضلع التكراري مع المحور الأفقي وذلك بافـتراض وجـود فئـة قبـل الفئـة الأولى بنفس طول الفئات ولكن تكرارهـا صفـر ووجـود فئـة بعـد الفئـة الأخيرة بنفس طول الفئات ذات تكرار صفر حيـث يوصـل طرفـا المضلـع التكراري بمركزي هاتين الفئتـين فيتـم إقفالـه والشـكل (٢) يبـين المضلـع التكراري المرسوم على المدرج.

مثال (١١): بالرجوع إلى المثـال (٣) والجـدول الـوارد فيـه ارسـم المضلـع التكـراري باستخدام المدرج.



شكل (٢)

ب- بدون استخدام المدرج التكراري: يتم بأخذ محورين متعامدين نعين على المحور الأفقي مراكز الفئات وعلى المحور الرأسي التكرارات ويتم إقفاله عن طريق أخذ مركز فئة تسبق الفئة الأولى بنفس طول الفئات ذات تكرار صفر ومركز فئة تلحق الفئة الأخيرة بنفس الطول ذات تكرار صفر ثم اقفال المضلع بإيصال النقاط التي إحداثياتها (مركز الفئة، تكرار الفئة) مع بعضها بخطوط مستقيمة.

مثال (١٢): مثّل الجدول رقم (٢) باستخدام المضلع التكراري.

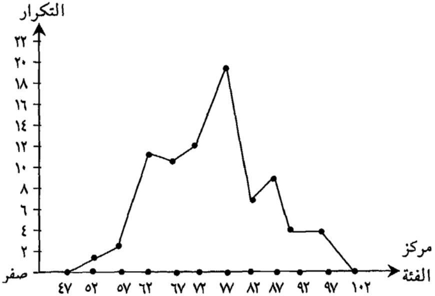
الحل: خطوات الرسم:

١- نرسم محورين متعامدين.

٢- نعين مراكز الفئات على المحور الأفقي وتكرارات الفئات على المحور العمودي.

٣- يتم التوصيل بين النقاط التالية: (٤٧،صفر)، (١،٥٢)، (٢،٥٧)، (١١،٦٢)، (١٠،٦٧)، (١٢،٧٢)، (٢١،٧٧)، (٦،٨٢)، (٩،٨٧)، (٤،٩٢)، (٤،٩٧)، (١٠٢،صفر) بخطوط منكسرة.

والشكل رقم (٣) يبين المضلع التكراري.



شكل (٣)

خواص المضلع التكراري: أن المساحة تحت المضلع التكراري تساوي مساحة المدرج التكراري وذلك لأن كل ضلع من أضلاع المضلع يحذف من المدرج مثلثاً وفي نفس الوقت يضيف إليه مثلثاً مساوياً له المساحة. لاحظ الشكل (٢).

٣- المنحنى التكراري: إذا مهدنا المضلع التكراري وجعلناه منحنى بدلاً من الخطوط المنكسرة فإننا نحصل على المضلع التكراري وينبغي عدم رسم المنحنى التكراري إلا إذا كانت الفئات كثيرة العدد ذات طول صغير وكان عدد البيانات كبيراً وكانت هذه البيانات من النوع المتصل كدرجة الحرارة والعمر.

ملاحظات:

١- إذا استبدلنا التكرار بالتكرار النسبي ورسمنا المدرج أو المضلع أو المنحنى فإننا نحصل على المدرج أو المضلع أو المنحنى التكراري النسبي.

٢- إذا استبدلنا التكرار بالتكرار المئوي ورسمنا المدرج أو المضلع أو المنحنى فإننا نحصل على المدرج أو المضلع أو المنحنى التكراري المئوي.

(٢-٤) تمثيل التوزيعات التراكمية بيانيا:

١- المضلع التكراري المتجمع الصاعد: نحصل على المضلع التكراري المتجمع الصاعد برصد التكرار التراكمي الصاعد لأي فئة مقابل الحد الفعلي ثم وصل النقاط

بخطوط مستقيمة. أي أننا نأخذ محورين متعامدين نعين على المحور الأفقي الحد الفعلي للفئة والتكرار التراكمي على المحور الرأسي ثم وصل النقاط التي إحداثياتها (الحد الفعلي، التكرار التراكمي الصاعد) مع بعضها البعض بخطوط منكسرة.

مثال (١٣): بالرجوع والاستعانة بالجدول رقم (١١) ارسم المضلع المتجمع الصاعد.

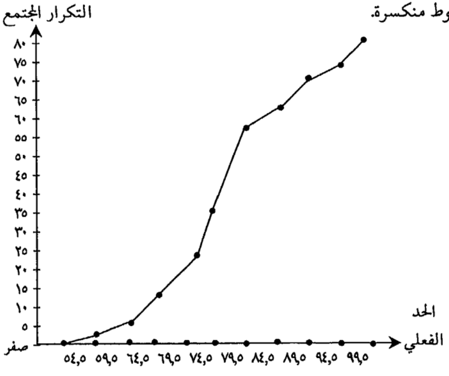
الحل: خطوات الرسم:

١- نرسم محورين متعامدين.

٢- نعين على المحور الأفقي الحدود الفعلية للفئات.

٣- نعين على المحور العمودي (الرأسي) التكرار التراكمي.

٤- يتم التوصيل بين بالنقاط التالية: (٤٩,٥، صفر)، (٥٤,٥، ١)، (٥٩,٥، ٣)، (٦٤,٥، ١٤)، (٦٩,٥، ٢٤)، (٧٤,٥، ٣٦)، (٧٩,٥، ٥٧)، (٨٤,٥، ٦٣)، (٨٩,٥، ٧٢)، (٩٤,٥، ٧٦)، (٩٩,٥، ٨٠) بخطوط منكسرة.



شكل (٤)

٢- **المضلع التكراري المتجمع الهابط**: نحصل على المضلع التكراري المتجمع الهابط برصد التكرار التراكمي الهابط لأي فئة مقابل الحد الفعلي ثم وصل هذه النقاط بخطوط منكسرة أي أننا نأخذ محورين متعامدين ثم نعين على المحور الأفقي الحد الفعلي للفئة وعلى المحور العمودي التكرار التراكمي ثم وصل النقاط التي احداثياتها

(الحد الفعلي، التكرار الهابط) مع بعضها البعض بخطوط منكسرة (مستقيمة).

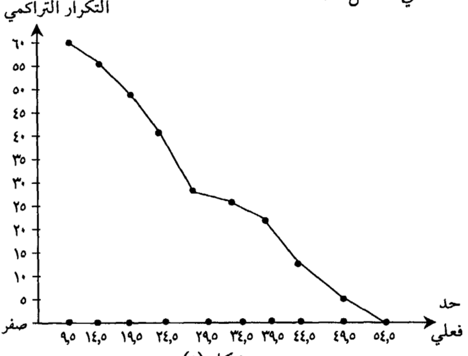
مثال(١٤): بالاستعانة بالجدول أدناه رقم (١٥) ارسم المضلع المتجمع الهابط.

الفئات	التكرار	أكبر من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي هابط
١٠-١٤	٥	٩,٥	٦٠
١٥-١٩	٧	١٤,٥	٥٥
٢٠-٢٤	٨	١٩,٥	٤٨
٢٥-٢٩	١٢	٢٤,٥	٤٠
٣٠-٣٤	٣	٢٩,٥	٢٨
٣٥-٣٩	٤	٣٤,٥	٢٥
٤٠-٤٤	١١	٣٩,٥	٢١
٤٥-٤٩	٥	٤٤,٥	١٠
٥٠-٥٤	٥	٤٩,٥	٥
		٥٤,٥	صفر

الجدول (١٥)

الحل: المضلع التكراري المتجمع الهابط

كما في الشكل (٥)



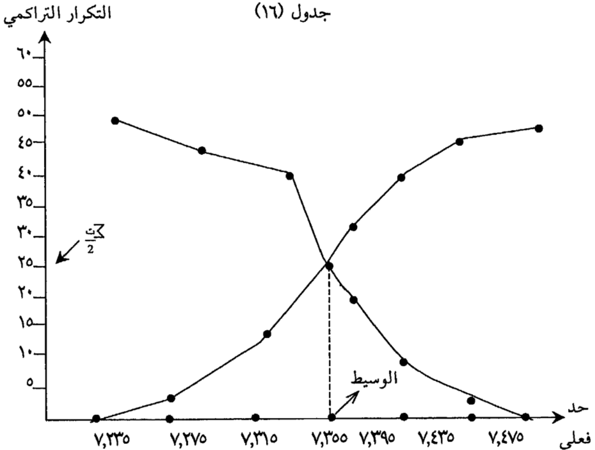
شكل (٥)

مثال(١٥): بالاستعانة بالجدول (١٦) أدناه ارسم المنحنى المتجمع الصاعد والهابط

على نفس الشكل؟ وعلق على الرسم؟

الفئات	التكرار	أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار متجمع صاعد	أكبر من أو يساوي حد فعلي	تكرار متجمع هابط
٧,٢٠-٧,٢٣	صفر	٧,٢٣٥	صفر	٧,٢٣٥	٥٠
٧,٢٤-٧,٢٧	٤	٧,٢٧٥	٤	٧,٢٧٥	٤٦
٧,٢٨-٧,٣١	٥	٧,٣١٥	٩	٧,٣١٥	٤١
٧,٣٢-٧,٣٥	١٩	٧,٣٥٥	٢٨	٧,٣٥٥	٢٢
٧,٣٦-٧,٣٩	١٣	٧,٣٩٥	٤١	٧,٣٩٥	٩
٧,٤٠-٧,٤٣	٧	٧,٤٣٥	٤٨	٧,٤٣٥	٢
٧,٤٤-٧,٤٧	٢	٧,٤٧٥	٥٠	٧,٤٧٥	صفر
٧,٤٨-٧,٥١	صفر				

جدول (١٦)



شكل (٦)

يتقاطع المنحنى المتجمع الصاعد والهابط بنقطة الإحداثي الأفقي لها،

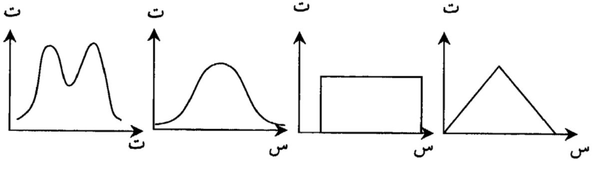
الوسيط والإحداثي الرأسي لها هو مجموع التكرارات مقسوماً على٢ .

(٢-٥) أشكال التوزيعات التكرارية:

ينى وصف البيانات الإحصائية على ثلاثة عناصر رئيسة هي: (١) الشكل (٢) النزعة المركزية (٣) التشتت.

وسنعمل الآن على دراسة شكل التوزيع التكراري: هنالك خواص نميّز بها شكل التوزيع منها:

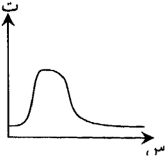
أ - خاصية التماثل للتوزيع وعدمه: فيكون التوزيع متماثلاً إذا استطعنا إقامة عمود على المحور الأفقي بحيث يقسم هذا العمود التوزيع إلى قسمين ينطبقان على بعضهما تمام الانطباق. والأشكال (١-٤) تمثل بعض التوزيعات المتماثلة.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

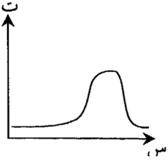
ويجدر بالملاحظة أنه في التوزيعات المتماثلة بأن المشاهدات المتساوية البعد عن عمود التماثل لها نفس التكرارات.

أما في التوزيعات التي يكون عدم تماثلها واضحاً فتسمى توزيعات ملتوية. ويكون التوزيع ملتوياً إذا امتد أحد طرفيه يساراً أو يميناً كثيراً. وكذلك يكون التوزيع ملتوياً إذا كانت القمة العالية فيه بعيلة عن المركز، أي إذا كان عالياً من جهة ومنخفضاً من جهة أخرى والأشكال (٥-٧) تمثل بعض التوزيعات الملتوية.



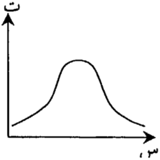
التوزيع ملتو نحو اليمين (موجب الالتواء)

شكل (٥)



ملتو نحو اليسار (سالب الالتواء)

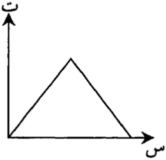
شكل (٦)



معتدل الالتواء

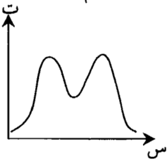
شكل (٧)

ب- الخاصية الثانية من حيث عدد القمم لاحظ الأشكال (٨-١٠).



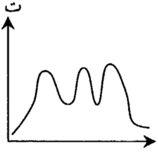
أحادي القمة (قمة واحدة)

شكل (٨)



توزيع ذو قمتين

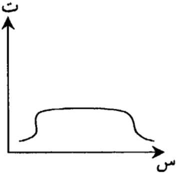
شكل (٩)



توزيع ذو ثلاث قمم

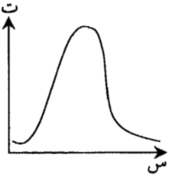
شكل (١٠)

خاصية التفرطح: الأشكال (١١-١٣) توضح هذه الخاصية:



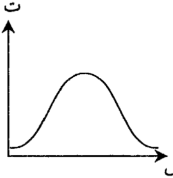
مفرطح

شكل (١١)



مدبب

شكل (١٢)



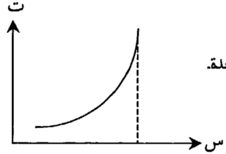
معتدل التفرطح

شكل (١٣)

ومن الجدير ذكره أن هنــالك بعـض التسـميات لبعـض أشـكال التوزيعـات التكرارية.

١- التوزيع الرائي كما يوضح الشكل (١٤).

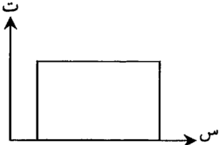
خصائصه: ملتوٍ نحو اليسار له قمة واحدة.



الشكل (١٤)

٢- التوزيع المتجانس كما يوضح الشكل (١٥)

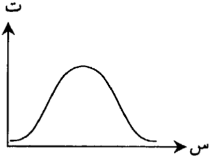
خصائص: متماثل.



شكل (١٥)

٣- التوزيع الناقوسي (الجرس) كما يوضح الشكل (١٥).

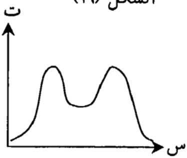
خصائصه: متماثل، أحادي القمة.



الشكل (١٦)

٤- توزيع U كما يوضح الشكل (١٧)

خصائصه: توزيع متماثل له قمتين.



الشكل (١٧)

تمارين الوحدة الثانية

س١ : الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة في الأعوام ١٨٤٠–١٩٥٠.

السنة	١٨٤٠	١٨٥٠	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩٢٠	١٩٣٠	١٩٤٠	١٩٥٠
العمال الزراعيين بالمليون	٣,٧	٤,٩	٦,٢	٦,٩	٨,٦	9,9	١٠,٩	١١,٦	١١,٤	١٠,٥	8,8	٦,٨
العمال غير الزراعيين بالمليون	١,٧	٢,٨	٤,٣	٦,١	8,8	١٣,٤	١٨,٢	٢٥,٨	٣١	٣٨,٤	٤٢,٩	٥٢,٢

المصدر: مصلحة التجارة، مكتب التعدادات.

أعرض هذه البيانات باستخدام (١) الخط البياني. (٢) الأعمدة البيانية.

س٢؛ الجدول التالي يبين ارتفاعات أعلى سبعة مباني ومنشآت في العالم.

المكان	نيويورك	نيويورك	باريس	نيويورك	نيويورك	نيويورك	نيويورك
الارتفاع بالمتر	٣٨١	٣١٩	٣٠٠	٢٩٠	٢٨٣	٢٥٩	٢٤١
المبنى أو المنشأة	مبنى الامبيرسنت	مبنى كريزلر	برج إيفل	مبنى وول ستريت	بنك مانهاتن	مركز روكفلر	مبنى وولورث

أعرض هذه البيانات بطريقتين.

س٣: الجدول التالى يبين السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية:

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة كم/ثانية	٤٧,٨	٣٥,١	٢٩,٨	٢٤,١	١٣	٩,٧	٦,٨	5,5	٤,٨

اعرض هذه البيانات بطريقتين:

س٤: الجدول التالي يبين المساحة بمليون الكيلومترات المربعة لمحيطات العالم.

المحيط	الهادي	الأطلنطي	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة مليون كم^{٢}	١٨٣,٤	١٠٦,٧	٨٣,٨	١٩,٧	١٢,٤

اعرض هذه البيانات بطريقة (١) المستطيلات. (٢) الدائرة.

س٥: صمم جدولاً لتعرض فيه توزيع الطلبة في كليتك حسب التخصص والجنس.

س٦: فيما أعداد القادمين للأردن عبر حدود المملكة من مختلف الجنسيات خلال الأعوام ١٩٩٥، ١٩٩٦، ١٩٩٧، ١٩٩٨ .

السنة / القادمون	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨
أردني	١٨٥٢٠٠	١٩٥١٠٠	٢٠١٠٠٠	١٧٥٩٠٠
عربي غير أردني	١٥٠٣٥٠	١٢٧٥٠٠	١٩٦٢٠١	١٨٥٠٠٠
أجنبي	١٦١٣٠٠	٢١١٩٠٠	٢٢٠٣٥٠	٢١٠٩٠٠

اعرض هذه البيانات:

(١) الأعمدة البيانية.

(٢) القطاع الدائري لكل سنة على حدة.

(٣) مثل الفرق بين القادمين العرب غير الأردنيين والأجانب لكل سنة على حدة.

س٧: البيانات التالية تمثل علامات(٦٠) طالباً في مادة الإحصاء التربوي في إحدى الجامعات:

61	88	80	72	65	86	43	62	77	61
77	68	81	63	76	84	42	65	98	92
63	58	91	74	54	93	48	77	85	63
81	73	64	75	63	92	45	68	86	64
82	94	75	76	73	91	61	55	74	85
84	49	72	81	82	88	72	45	77	71

١- ضع هذه البيانات في جدول تكراري. ٢- ارسم المدرج التكراري للتوزيع.
٣- ارسم المضلع التكراري للتوزيع. ٤- ارسم المنحنى التكراري للتوزيع.
٥- ابني الجدول التكراري النسبي. ٦- ارسم المضلع التكراري النسبي.
٧- ابني الجدول التكراري المئوي. ٨- ارسم المدرج التكراري المئوي.
٩- ابني الجدول التكراري المتجمع الصاعد. ١٠- ارسم المضلع المتجمع الصاعد.
١١- ابني الجدول التكراري المتجمع الهابط. ١٢- ارسم المضلع المتجمع الهابط.

س٨ : البيانات التالية تمثل أقطار (٣٠) كرة مصنوعة في شركة ما.

٨,٣	٦,٣	٧,٤	٦,٤	٨,١	٧,٤
٦,١	٧,٠	٧,٥	٦,٥	٧,٢	٧,٣
٧,٢	٨,٠	٧,٩	٦,٧	٧,٣	٦,٨
٧,٤	٦,٨	٨,٢	6,6	٦,٥	٨,١
٧,٥	٦,٧	٨,١	7,7	٦,٧	٨,٢

١- ضع هذه البيانات في جدول تكراري عدد فئاته (٥).
٢- كوّن الجدول المتجمع النسبي الصاعد.
٣- ارسم المضلع المتجمع النسبي الصاعد.

٤- كون الجدول المتجمع المئوي الهابط.

٥- ارسم المضلع المتجمع المئوي الهابط.

س٩: الجدول أدناه يبين التوزيع التكراري للعمر الإنتاجي لـ ٤٠٠ لمبه راديو التي اختيرت في شركة ما للمبات.

العمر الإنتاجي (بالساعات)	عدد اللمبات
٣٠٠-٣٩٩	١٤
٤٠٠-٤٩٩	٤٦
٥٠٠-٥٩٩	٥٨
٦٠٠-٦٩٩	٧٦
٧٠٠-٧٩٩	٦٨
٨٠٠-٨٩٩	٦٢
٩٠٠-٩٩٩	٤٨
١٠٠٠-١٠٩٩	٢٢
١١٠٠-١١٩٩	٦
المجمـــــوع	٤٠٠

المطلوب:

١- الحد الأعلى للفئة الخامسة.

٢- الحد الأدنى للفئة الثامنة.

٣- مركز الفئة السابعة.

٤- الحدود الفعلية للفئة الأخيرة.

٥- طول الفئة.

٦- تكرار الفئة الرابعة.

٧- التكرار النسبي للفئة السادسة.

٨- النسبة المئوية للمبات التي لا يتجاوز عمرها الإنتاجي ٦٠٠ ساعة.

٩- النسبة المئوية للمبات التي لا يقل عمر الإنتاجي عن ٥٠٠ ساعة.

١٠- ارسم المدرج التكراري.

١١- ارسم المضلع التكراري.   ١٢- ارسم المضلع المتجمع النسبي.

س١٠: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للزمن (لأقرب ثانية) الذي استغرقه (٦٠) رياضي لقطع مسافة (٢٠٠) متر.

الزمن	عدد الرياضيين
٣٥-٣٩	٥
٤٠-٤٤	٨
٤٥-٤٩	١٢
٥٠-٥٤	٢٠
٥٥-٥٩	٨
٦٠-٦٤	٧

المطلوب:

١- ما هي الحدود الفعلية للفئات وما هي مراكزها.

٢- أوجد التوزيع التكراري النسبي وارسم مضلعه.

٣- أوجد التوزيع المتجمع الصاعد.

٤- عدد الرياضيين الذين قطعوا المسافة في زمن أقل من (٥٤,٥) ثانية.

٥- نسبة الرياضيين الذي قطعوا المسافة في زمن أقل من (٤٤,٥) ثانية.

٦- أوجد نسبة الرياضيين الذي قطعوا المسافة في زمن أقل من أو يساوي (٥٢)ثانية.

٧- أوجد التوزيع المتجمع الهابط.

٨- أوجد عدد الرياضيين الذين قطعوا المسافة في زمن لا يقل عن ٤٤,٥ ثانية.

س١١: إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكراري لأعمار (٧٠) طالباً في مدرسة ثانوية هي: ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠ أوجد طول الفئة والحدود الفعلية لكل فئة إذا كانت الأعمار قد سجلت لأقرب سنة.

٣

الوحدة الثالثة

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

مفهوم النزعة المركزية: هنالك ميل لأن تتجمع المفردات في التوزيعات المختلفة حول قيمة معينة من التوزيع، وهذا الميل يسمى النزعة المركزية أي نزعة المفردات المختلفة للتجمع حول مركز معين.

وهكذا فإن النزعة المركزية يمكن تعريفها بأن ميل معظم المفردات المختلفة للتمركز حول نقطة أو قيمة واحدة تسمى القيمة المتوسطة، فالقيمة المتوسطة لمجموعة من المشاهدات هي قيمة نجدها من مجموعة المشاهدات لتمثل البيانات (المفردات) بشكل مقبول.

مقاييس النزعة المركزية: للنزعة المركزية مقاييس عديدة أهمها:

١- الوسط الحسابي   ٣- المنوال.

٢- الوسيط   ٤- المثينات.

ولكن من هذه المقاييس عيوبه ومزاياه وبالتالي لا نستطيع تفضيل بعضها على بعض بشكل مطلق. وسندرس كل مقياس من هذه المقاييس بالتفصيل.

(٣-١) الوسط الحسابي:

يعرف الوسط الحسابي بأنه مجموع القيم مقسوماً على عددها:

(٣-١-١) في حالة المشاهدات المفردة:

سنستخدم طريقتين لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العامة): ليكن لدينا المشاهدات $س_1، س_2، ...، س_ن$ فإن الوسط الحسابي ($\overline{س}$) يعرف كالتالي:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{س_1 + س_2 + ... + س_ن}{ن}$$

أي أن: $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$

ويقصد بـ $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر = س_1 + س_2 + \dots\dots + س_ن$ [مجموع المشاهدات].

ملاحظة: سنكتب للاختصار $\sum س_ر$ بدلاً من $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$

وعندئذ $\bar{س} = \frac{\sum س_ر}{ن}$ ....(١)

ولتوضيح مفهوم الوسط الحسابي سنورد الأمثلة التالية:

مثال(١): أوجد الوسط الحاسبي للقيم -١٧، ١٦، ٣٠، ٢٠، ١٥، ١٦ .

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{-١٧ + ١٦ + ٣٠ + ٢٠ + ١٥ + ١٦}{٦}$$

❖ $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر = س_1 + س_2 + \dots\dots + س_ن$

مثال(٢): أوجد الوسط الحسابي للمشاهدات: ٦٧ ، ٦٣ ، ٩١ ، ٩٤ ، ١٠٠ ، ٥٤ ، ٧١ ، ٨٠ ، ٩٥

الحل:

$$\bar{س} = \frac{\sum س_ر}{ن} = \frac{٦٧ + ٦٣ + ٩١ + ٩٤ + ١٠٠ + ٥٤ + ٧١ + ٨٠ + ٩٥}{٩} = \frac{٧١٥}{٩} = ٧٩,٤٤٤$$

مثال (٣): كانت علامات أحمد في إحدى الفصول المدرسية كالتالي: ٨٤، ٩٦، ٧٢، ١٠٠، ٩٤ ، ٩٦، ٩٧ ، ٨٥ . أحسب المعدل الفصلي لأحمد.

الحل:

$$\text{معدل أحمد الفصلي} = \bar{س} = \frac{\text{مجموع العلامات}}{\text{عددها}}$$

$$= \frac{٨٤ + ٩٦ + ٧٢ + ١٠٠ + ٩٤ + ٩٦ + ٩٧ + ٨٥}{٨} = \frac{٧٢٤}{٨} = ٩٠,٥$$

الطريقة الثانية (طريقة الوسط الفرضي): ليكن لدينا مجموعة من المشاهدات

س١، س٢، ....، سن فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي يعرف كالتالي:

$$\bar{\text{س}} = \text{ف} + \frac{\sum \text{ح}_\text{ر}}{\text{ن}} \quad .... \quad (٢)$$

حيث ف: الوسط الفرضي (قيمة افتراضية نفترضها إحدى القيم التي لدينا أو أي قيمة أخرى).

$\text{ح}_\text{ر}$: انحراف القيمة عن الوسط الفرضي أي أن $\text{ح}_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} - \text{ف}$.

مثال(٤): مستخدماً طريقة الوسط الفرضي احسب الوسط الحسابي للقيم التالية:
٦٧، ٨٥، ٨٠، ٧٥، ٦٠، ٥٥ .

الحل: لنختار الوسط الفرضي (ف)= ٧٥.

$$\sum \text{ح}_\text{ر} = \sum(\text{س}_\text{ر} - ٧٥) = (٦٧ - ٧٥) + (٨٥ - ٧٥) + (٨٠ - ٧٥) + (٧٥ - ٧٥) + (٦٠ - ٧٥) + (٥٥ - ٧٥)$$

❖ $\sum \text{ح}_\text{ر} = -٨ + ١٠ + ٥ + ٠ + -١٥ + -٢٠ = -٢٨$

الآن بتطبيق المعادلة (٢) ينتج: $\bar{\text{س}} = ٧٥ + \frac{-٢٨}{٦} = ٧٥ - \frac{٢٨}{٦}$

$$= ٧٥ - ٤,٦٧ = ٧٠,٣٣$$

ملاحظة: لا يتغير الوسط لحسابي بتغيير الوسط الفرضي ولبيان هذه الخاصية لنختار في المثال السابق وسطاً فرضياً (٨٠).

فنلاحظ بأن:

$$\sum \text{ح}_\text{ر} = (٦٧ - ٨٠) + (٨٥ - ٨٠) + (٨٠ - ٨٠) + (٧٥ - ٨٠) + (٦٠ - ٨٠) + (٥٥ - ٨٠) = -٥٨$$

الآن بتطبيق المعادلة (٢) ينتج أن : $\bar{\text{س}} = ٨٠ - \frac{٥٨}{٦} = ٨٠ - ٩,٦٦٧ = ٧٠,٣٣$

ثانيا: في حالة المشاهدات المتكررة:

هنالك طريقتان هما :

الطريقة العامة: ليكن لدينا المشاهدات س١، ....، سم، والتكرارات المقابلة هي ك١، ...، ك م على الترتيب فإن الوسط الحسابي يعرف كالتالي:

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب المشاهدات بالتكرارات المقابلة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{س_1 \times ك_1 + ... + س_م \times ك_م}{ك_1 + ك_2 + ... + ك_م}$$

أي أن: $\bar{س} = \frac{\sum س_ر \times ك_ر}{ك_ر}$ .... (٣)

مثال (٥): الجدول التالي يبين أوزان خمسين شخص أحسب الوسط الحسابي (معدل) الأوزان.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠
عدد الأشخاص ($ك_ر$)	٩	١٠	١١	٦	٤	١٠

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي للأوزان} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب الأوزان بعدد الأشخاص المقابل}}{\text{عدد الأشخاص}}$$

$$= \frac{س_1 \times ك_1 + س_2 \times ك_2 + س_3 \times ك_3 + س_4 \times ك_4 + س_5 \times ك_5 + س_6 \times ك_6}{ك_1 + ك_2 + ك_3 + ك_4 + ك_5 + ك_6}$$

$$= \frac{٥٥ \times ٩ + ٦٠ \times ١٠ + ٦٥ \times ١١ + ٧٠ \times ٦ + ٧٥ \times ٤ + ٨٠ \times ١٠}{٩ + ١٠ + ١١ + ٦ + ٤ + ١٠}$$

$$= \frac{٤٩٥ + ٦٠٠ + ٧١٥ + ٤٢٠ + ٣٠٠ + ٨٠٠}{٥٠} = \frac{٣٣٣٠}{٥٠} = ٦٦{,}٦$$

مثال (٦): إليك الجدول التالي الذي يبين علامات عبير في أحد الفصول الدراسية الجامعية.

المادة	ت١٠١	ر١٠١	ف١٠١	ك١٠١	ق١٠١
العلامة	٨٠	٩٠	٦٥	٨٢	٨٠
عدد الساعات المعتمدة	٣	٢	١	٦	٣

احسب معدل عبير الفصلي

الحل: $\text{معدل عبير الفصلي} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب علامات المواد بساعاتها المعتمدة}}{\text{مجموع الساعات المعتمدة}}$

$$= \frac{٨٠ \times ٣ + ٩٠ \times ٢ + ٦٥ \times ١ + ٨٢ \times ٦ + ٨٠ \times ٣}{٣ + ٢ + ١ + ٦ + ٣}$$

$$= \frac{١٢١٧}{١٥} = ٨١{,}١٣$$

الطريقة الثانية (طريقة الوسط الفرضي): ليكن لدينا المشاهدات $س_1$،...، $س_م$ والتكرارات المقابلة هي $ك_1$، ...، $ك_م$ فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (ف) يعرف كالتالي:

$$\overline{س} = ف + \frac{\sum ح_ر \times ك_ر}{ك_ر} \quad .... (٤)$$

حيث ف: الوسط الفرضي، $ح_ر = س_ر - ف$

خطوات الحل:

١- اختيار وسط فرضي (ف) ويفضل أن تكون القيمة ذات أكبر تكرار.

٢- حساب الانحرافات ($ح_ر$).

٣- ضرب الانحرافات ($ح_ر$) بالتكرار المقابل.

٤- إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة الثالثة.

ولتوضيح هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال (٧): الجدول التالي يبين أعمار (٢٠) شخص والمطلوب حساب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي:

العمر ($س_ر$)	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٣٠
عدد الأشخاص ($ك_ر$)	٢	٣	٢	٣	٥	٥

الحل: لنختار وسط فرضي (٢٧) ونكون جدول الحل:

$س_ر$	$ك_ر$	$ح_ر = س_ر - ٢٧$	$ح_ر \times ك_ر$
٢٣	٢	٢٣-٢٧=-٤	-٤×٢=-٨
٢٤	٣	٢٤-٢٧=-٣	-٣×٣=-٩
٢٥	٢	٢٥-٢٧=-٢	-٢×٢=-٤
٢٦	٣	٢٦-٢٧=-١	-١×٣=-٣
٢٧	٥	٢٧-٢٧=٠	٠×٥=٠
٣٠	٥	٣٠-٢٧=٣	٣×٥=١٥
المجموع	٢٠		-٩

الآن: بتطبيق المعادلة (٤) ينتج:

$$\overline{س} = ٢٧ + \frac{-٩}{٢٠}$$

$$= ٢٧ - ٠,٤٥ = ٢٦,٥٥$$

ثالثا: في حالة الجداول التكرارية:

هنالك ثلاث طرق لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العامة) ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هي: $س_١، ...، س_م$ والتكرارات المقابلة هي $ت_١، ....، ت_م$ فإن الوسط الحسابي ($\overline{س}$) يعرف كالتالي:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب مراكز الفئات بالتكرارات المقابلة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{س_1 \times ت_1 + ... + س_م \times ت_م}{ت_1 + ... + ت_م}$$

❖ $$\bar{س} = \frac{\sum س_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر} \quad .... \quad (٥)$$

خطوات حسابه:

١- إيجاد مراكز الفئات($س_ر$).

٢-ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها.

٣- إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة (٢).

٤- نطبق المعادلة (٥).

وللتوضيح سنورد الأمثلة التالية:

مثال (٨): أوجد الوسط الحسابي للجدول التالي الذي يبين أجور (٩٠) عامل في أحد المصانع بالدينار الأردني خلال أسبوع معين.

الأجر الأسبوعي	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩
عدد العمل	٦	٣	١١	١٠	٢٠	٤٠

الحل: بتكوين جدول الحل على النحو التالي:

الأجرة الأسبوعية الفئات	عدد العمال التكرارات($ت_ر$)	مركز الفئة ($س_ر$)	$س_ر \times ت_ر$
٢٠-٢٤	٦	٢٢	٢٢×٦=١٣٢
٢٥-٢٩	٣	٢٧	٢٧×٣=٨١
٣٠-٣٤	١١	٣٢	٣٢×١١=٣٥٢
٣٥-٣٩	١٠	٣٧	٣٧×١٠=٣٧٠
٤٠-٤٤	٢٠	٤٢	٤٢×٢٠=٨٤٠
٤٥-٤٩	٤٠	٤٧	٤٧×٤٠=١٨٨٠
المجموع	٩٠		٣٦٥٥

الآن بتطبيق المعادلة (٥):

$$\bar{س} = \frac{\sum س_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر}$$

$$= \frac{٣٦٥٥}{٩٠} = ٤٠,٦١$$

مثال (٩): الجدول التالي يبين علامات إحدى الشعب في مساق الإحصاء التربوي:

فئات العلامات	التكرار
٣٥-٥٠	١٠
٥١-٦٦	١٥
٦٧-٨٢	١٥
٨٣-٩٨	١٠

احسب الوسط الحسابى للعلامات

الحل: نعمل على تكوين جدول الحل:

الفئات	$ت_ر$	$س_ر$	$س_ر \times ت_ر$
٣٥-٥٠	١٠	٤٢,٥	٤٢٥
٥١-٦٦	١٥	٥٨,٥	٨٧٧,٥
٦٧-٨٢	١٥	٧٤,٥	١١١٧,٥
٨٣-٩٨	١٠	٩٠,٥	٩٠٥
الجموع	٥٠		٣٣٢٥

الآن: بتطبيق المعادلة رقم (٥) ينتج:

$$\overline{س} = \frac{٣٣٢٥}{٥٠} = ٦٦,٥$$

الطريقة الثانية: (طريقة الوسط الفرضي): ليكن لدينا جدول تكـراري مراكـز فئاتـه هي: $س_١$، ....، $س_م$، والتكرارات المقابلة هي $ت_١$، ....، $ت_م$ فإن الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي يعرف كالتالي:

$$\overline{س} = ف + \frac{\sum ح_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر} \quad .... (٦)$$

حيث ف: الوسط الفرضي [يفضل أن نختاره مركز الفئة ذات أعلى تكرار]

$ح_ر$: انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي أي أن: $ح_ر = س_ر - ف$

خطوات حسابه:

١- نجد مراكز الفئات.

٢- نختار الوسط الفرضي (ف).

٣- نجد انحراف كل مركز فئة عن الوسط الفرضي ($ح_ر$).

٤- نضرب $ح_ر$ بالتكرار المقابل ($ح_ر \times ت_ر$).

٥- نجد مجموع حواصل الضرب في الخطوة (٤).

٦- نطبق المعادلة رقم (٦).

والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال (١٠): إليك الجدول التالي:

الفئات	٣-١٣	١٤-٢٤	٢٥-٣٥	٣٦-٤٦	٤٧-٥٧
التكرار	٦	٧	٦	١٦	١٥

احسب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي

الحل: نعمل على تكوين الجدول الخاص بالحل.

الفئات	التكرارات ($ت_ر$)	مركز الفئة ($س_ر$)	$ح_ر = س_ر - ٤١$	$ح_ر \times ت_ر$
٣-١٣	٦	٨	٨-٤١=-٣٣	-٣٣×٦=-١٩٨
١٤-٢٤	٧	١٩	١٩-٤١=-٢٢	-٢٢×٧=-١٥٤
٢٥-٣٥	٦	٣٠	٣٠-٤١=-١١	-١١×٦=-٦٦
٣٦-٤٦	١٦	٤١ف	٤١-٤١= صفر	٠×١٦=٠
٤٧-٥٧	١٥	٥٢	٥٢-٤١=١١	١١×١٥=١٦٥
المجموع	٥٠			-٢٥٣

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٦):

$$\overline{س} = ف + \frac{\sum ح_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر} = ٤١ + \frac{-٢٥٣}{٥٠} = ٤١ - ٥,٠٦ = ٣٥,٩٤$$

الطريقة الثالثة: (طريقة الانحرافات المختصرة) ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته $س_١$، ....، $س_م$ والتكرارات المقابلة $ت_١$، ....، $ت_م$ فإن الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة يعرف كالتالي:

$$\overline{س} = ف + \frac{\sum ح'_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر} \times ل \quad .... (٧)$$

حيث ف : الوسط الفرضي.

$ح'_ر$: انحراف مركز الفئة عن الوسط مقسوماً على طول الفئة.

ل : طول الفئة.

مثال (١١): إليك الجدول التالي:

الفئات	التكرار
١٠-١٥	٧
١٦-٢١	٨
٢٢-٢٧	١٠
٢٨-٣٣	٥

احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفئات	$ت_ر$	$س_ر$	$ح_ر = س_ر - ٢٤,٥$	$ح'_ر = \frac{ح_ر}{ل} = \frac{ح_ر}{٦}$	$ح'_ر \times ت_ر$
١٠-١٥	٧	١٢,٥	١٢,٥-٢٤,٥=-١٢	$\frac{-١٢}{٦} = -٢$	-٢×٧=-١٤
١٦-٢١	٨	١٨,٥	١٨,٥-٢٤,٥=-٦	$\frac{-٦}{٦} = -١$	-١×٨=-٨
٢٢-٢٧	١٠	٢٤,٥ ف	٢٤,٥-٢٤,٥= ٠	$\frac{٠}{٦} = ٠$	٠×١٠=٠
٢٨-٣٣	٥	٣٠,٥	٣٠,٥-٢٤,٥=٦	$\frac{٦}{٦} = ١$	١×٥=٥
المجموع	٣٠				-١٧

الآن بتطبيق المعادلة (٧) ينتج:

$$\overline{س} = ف + \frac{\sum ح'_ر \times ت_ر}{\sum ت_ر} \times ل = ٢٤,٥ + \frac{-١٧}{٣٠} \times ٦$$

$$= ٢٤,٥ - \frac{١٧}{٥} = ٢٤,٥ - ٣,٤ = ٢١,١$$

رابعا: الوسط الموزون (المرجح):

ليكن لدينا المجموعات $أ_١$، $أ_٢$، ....، $أ_م$ وأوساطها الحسابية $\overline{س}_١$،....، $\overline{س}_م$ وأحجام هذه المجموعات (عدد عناصرها) هي: $ن_١$، ....، $ن_م$ على الترتيب فإن الوسط الحسابي المرجح (الموزون) الناتج عن الدمج يعطى بالعلاقة التالية:

$$\overline{س}_ر = \frac{\overline{س}_١ \times ن_١ + ... + \overline{س}_م \times ن_م}{ن_١ + ... + ن_م} \quad .... (٨)$$

مثال (١٢): تقدمت شعبتان لامتحان في الإحصاء هما أ ، ب فإذا كان الوسط الحسابي

لعلامات الشعبة أ يساوي(٦٠) وعدد طلبتها (٣٠) والوسط الحسابي لعلامات الشعبة ب يساوي (٥٠) وعدد طلبتها (٢٠) ما هو الوسط الحسابي (المرجح) للشعبتين معاً.

الحل: $\bar{س}_{أ}=٦٠$ ، $ن_{١}=٣٠$ ، $\bar{س}_{ب}=٥٠$، $ن_{٢}=٢٠$.

$$\text{الوسط الحسابي المرجح} = \frac{\bar{س}_{أ}\times ن_{١} + \bar{س}_{ب}\times ن_{٢}}{ن_{١}+ن_{٢}} = \frac{٦٠\times٣٠ + ٥٠\times٢٠}{٣٠+٢٠}$$

$$= \frac{٢٨٠٠}{٥٠} = ٥٦$$

مثال (١٣): أخذت ثلاثة عينات من ثلاثة مجتمعات فأعطت النتائج التالية:

$$\sum_{ر=١}^{ن_{١}} س_{ر} = ٣٠٠ \quad ، \quad \sum_{ر=١}^{ن_{٢}} ص_{ر} = ٢٠٠ \quad ، \quad \sum_{ر=١}^{ن_{٣}} ع_{ر} = ١٠٠$$

دمجت هذه العينات، أوجد الوسط الحسابي الناتج عن الدمج:

الحل: نجد الوسط الحسابي لكل عينة على حدة.

$$\bar{س} = \frac{\sum س_{ر}}{ن_{١}} = \frac{٣٠٠}{٥٠} = ٦$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص_{ر}}{ن_{١}} = \frac{٢٠٠}{٤٠} = ٥$$

$$\bar{ع} = \frac{\sum ع_{ر}}{ن_{٣}} = \frac{١٠٠}{١٠} = ١٠$$

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٨) ينتج:

$$\text{الوسط الحسابي بعد الدمج} = \frac{\bar{س}\times ن_{١} + \bar{ص}\times ن_{٢} + \bar{ع}\times ن_{٣}}{ن_{١}+ن_{٢}+ن_{٣}}$$

$$= \frac{٦\times٥٠ + ٥\times٤٠ + ١٠\times١٠}{٥٠+٤٠+١٠} = \frac{٣٠٠+٢٠٠+١٠٠}{١٠٠} = \frac{٦٠٠}{١٠٠} = ٦$$

مثال (١٤): الجدول التالي يبين المعدلات الفصلية والساعات المعتمدة لأحد طلبة الهندسة احسب المعدل التراكمي لهذا الطالب.

الفصل الدراسي	المعدل المعتمد	عدد الساعات المعتمدة	الفصل الدراسي	المعدل الفصلى	عدد الساعات المعتمدة	الفصل الدراسي	المعدل الفصلى	عدد الساعات المعتمدة
الأول ٩٥/٩٦	٧٦	١٥	الثاني ٩٧	٨٤,٣	١٧	أول ٩٨/٩٩	٩٠	١٨
الثاني ٩٦/	٨٢	١٨	الصيفي ٩٧	٩٠	١٢	الثاني ٩٩	٨٢	٢١
صيفي ٩٦	٨٥	٩	الأول ٩٧/٩٨	٨٨	٢٠	صيفي ٩٩	٩٢	١٠
الأول ٩٦/٩٧	٨٧,٣	١٨	الثاني ٩٨	٨٩	١٨	الأول ٩٩/٢٠٠٠	٨١	١٧

$$\text{معدل الطالب التراكمي} = \bar{س}_و = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب المعدلات الفصلية بعدد الساعات المعتمدة}}{\text{مجموع عدد الساعات المعتمدة}}$$

$$\bar{س}_و = \frac{١٧\times٨١+١٠\times٩٢+٢١\times٨٢+١٨\times٩٠+١٨\times٨٩+٢٠\times٨٨+١٢\times٩٠+١٧\times٨٤,٣+١٨\times٨٧,٣+٩\times٨٥+١٨\times٨٢+١٥\times٧٦}{١٧+١٠+٢١+١٨+١٨+٢٠+١٢+١٧+١٨+٩+١٨+١٥}$$

$$= \frac{١٣٧٧+٩٢٠+١٧٢٢+١٦٢٠+١٦٠٢+١٧٦٠+١٠٨٠+١٤٣٣,١+١٥٧١,٤+٧٦٥+١٤٧٦+١١٤٠}{١٩٣}$$

$\frac{١٦٤٦٦,٥}{١٩٣} \cong ٨٥,٣٢$ المعدل التراكمي لهذا الطالب.

(٣-٢) الوسيط (The Median)

تعريفه: هي القيمة التي تتوسط مجموعة من البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً لذلك فإن الوسيط يعتبر من مقاييس الموضع.

أولا: في حالة المشاهدات المفردة:

يعتمد تعريف الوسيط على عدد المفردات وليس قيمتها لذلك هنالك حالتين هما:

الحالة الأولى: إذا كان عدد المفردات فردي.

خطوات حسابه:

١- نرتب المشاهدات ترتيب تصاعدي أو تنازلي.

٢- نجد رتبة الوسيط ورتبة الوسيط (و) $= \frac{ن+١}{٢}$ حيث ن: عدد المشاهدات.

٣- تكون قيمة الوسيط هي تلك القيمة التي تقابل رتبته.

والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (١): استخرج الوسيط للمشاهدات (-١٧، -٢٧، ١٦، ٣١، ٣٠، ٩١، ٦٢).

الحل (١): نرتب المشاهدات ترتيب تصاعدي

القيمة	-٢٧	-١٧	١٦	٣٠	٣١	٦٢	٩١
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧

(٢) رتبة الوسيط (و) $= \frac{ن+١}{٢} = \frac{٧+١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

(٣) قيمة الوسيط هي تلك القيمة التي رتبتها ٤ (الرتبة الرابعة) وهنا تساوي ٣٠.

الحالة الثانية:

إذا كانت عدد المشاهدات (ن) عدد زوجي.

خطوات حسابه:

١- نرتب المشاهدات ترتيب تصاعدي أو تنازلي.

٢- نستخرج الرتبة للوسيط وهنالك رتبتين هما: رتبة الوسيط الأول، $(و_١) = \frac{ن}{٢}$،

رتبة الوسيط الثاني $(و_٢) = \left(\frac{ن}{٢}\right) + ١$.

٣- نستخرج قيمة $و_١$ وهي القيمة التي تقابل رتبته، ونستخرج قيمة $و_٢$ وهي القيمة التي تقابل رتبته.

٤- تكون قيمة الوسيط (و) $= \frac{قيمة\ و_١ + قيمة\ و_٢}{٢}$ (أي الوسط الحسابي للقيمتين).

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٢): استخرج الوسيط للمشاهدات : (٣ ، ١٠٠ ، ١٥ ، ٦ ، ٢ ، ٢٢).

الحل: ١- نرتب المشاهدات تصاعدياً : ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٢ ، ١٠٠ .

٢- نستخرج الرتبة للوسيط (هنالك رتبتين لأن عدد المشاهدات=ن=٦ زوجي).

رتبة $و_١ = \frac{ن}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$ ، رتبة $و_٢ = \left(\frac{ن}{٢}\right) + ١ = \left(\frac{٦}{٢}\right) + ١ = ٣ + ١ = ٤$.

٣- نستخرج قيمة $و_١$ وهنا القيمة التي رتبتها ٣ وتساوي ٦.

نستخرج قيمة $و_٢$ وهنا القيمة التي رتبتها ٤ وتساوي ١٥.

٤- قيمة الوسيط(و)=الوسط الحسابي للقيمتين $و_١$ ، $و_٢$ = $\frac{قيمة\ و_١ + قيمة\ و_٢}{٢}$

$= \frac{٦ + ١٥}{٢} = \frac{٢١}{٢} = ١٠,٥$.

مثال(٣): استخرج الوسيط في الحالات التالية:

(أ) ٦، -١٩، ٢٠، ١٦، ١٧، ١٥، ٨، ١٠.

(ب) ٣، ٠ ، -٢ ، ١ ، ٢٧، ٣٥، ٦٧، ٩٠، ٢٠٠.

الحل: (أ)١- نرتب المشاهدات تصاعدياً -١٩،٦، ٨،١٠،١٥،١٦،١٧،٢٠.

٢- بما أن عدد المشاهدات (ن)= ٨ (عدد زوجي) فإننا نستخرج الرتب الوسيطية:

رتبة $و_١ = \frac{ن}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$، رتبة $و_٢ = \left(\frac{ن}{٢}\right) + ١ = ٤ + ١ = ٥$

٣- نجد قيمة $و_١$، $و_٢$ ⇐ $و_١$ = ١٠ ، $و_٢$=١٥

٤- الوسيط = $و = \frac{و_١ + و_٢}{٢} = \frac{١٠ + ١٥}{٢} = \frac{٢٥}{٢} = ١٢,٥$

(ب) ١- بترتيب المشاهدات تصاعدياً: -٢، ٠، ١، ٣،٢٧،٣٥،٦٧،٩٠،٢٠٠.

٢- بما أن عدد المشاهدات (ن) = ٩ (عدد فردي) نستخرج الرتبة الوسيطية.

الرتبة الوسطية = $\frac{ن + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

٣- نجد الوسيط وهي القيمة التي تقابل الرتبة (٥) ونجده هنا يساوي ٢٧.

ملاحظة: نستطيع إيجاد الوسيط بطريقة أخرى وذلك باتباع الخطوات التالية:

١- نرتب المشاهدات تصاعدياً.

٢- نقوم بحذف مشاهدة من اليسار ومشاهدة من اليمين حتى يتبقى لدينا مشاهدة واحدة (هي الوسيط) في حالة كون عدد المشاهدات فردي ويبقى لدينا مشاهدتين (في حالة كون عدد المشاهدات زوجي)وفي هذه الحالة نأخذ معدلهما لإيجاد الوسيط.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٤): استخرج الوسيط للمشاهدات التالية: ٣ ، ٣٠ ، ٦١ ، ١٧ ، -٣٥ ، ٢ ، ١٩ ، ٧.

الحل: ١- نرتب المشاهدات تصاعدياً: -٣٥ ، ٢ ، ٣ ، ٧ ، ١٧ ، ١٩ ، ٣٠ ، ٦١ .

٢- نقوم بالحذف على النحو التالي: $\cancel{٣٥}$، $\cancel{٢}$، $\cancel{٣}$، ٧، ١٧، $\cancel{١٩}$، $\cancel{٣٠}$، $\cancel{٦١}$.

٣- يتبقى لدينا مشاهدتين هما: ٧، ١٧ وبالتالي فالوسيط = $\frac{١٧+٧}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$.

ثانيا: في حالة الجداول التكرارية:

هنالك ثلاثة طرق لحساب الوسيط هي:

١- طريقة القانون:

$$\text{الوسيط} = و = أ + \left[\frac{\frac{ن}{٢} - ن_{١}}{ت_{ف}}\right] \times ل \quad .... \quad (٩)$$

حيث: أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطية.

الفئة الوسيطية: هي تلك الفئة التي تكرارها التراكمي يزيد عن رتبة الوسيط.

$\frac{ن}{٢}$ = رتبة الوسيط حيث ن = مجموع التكرارات = $\sum ت_{ر}$.

$ن_{١}$ = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة الوسيطية.

$ت_{ى}$ = تكرار الفئة الوسيطية = التكرار التراكمي اللاحق للفئة الوسيطية - التكرار التراكمي السابق للفئة الوسيطية.

ل = طول الفئة الوسيطية = الحد الأعلى الفعلي للفئة الوسيطية - الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطية.

خطوات حسابه:

١- نجد رتبة الوسيط حيث رتبة الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

٢- تكوين الجدول التراكمي (حدود فعلية + تكرار تراكمي).

٣- نحدد الفئة الوسيطية ومنها نحدد قيمة أ.

٤- نحدد التكرار التراكمي السابق واللاحق.

٥- نطبق القانون الوارد في المعادلة (٩).

مثال (٥): أوجد الوسيط للجدول التالي:

الفئات	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	المجموع
التكرار	٣	١٤	١٦	١٧	١٠	٦٠

الحل:

١- نجد رتبة الوسيط حيث رتبة الوسيط $= \frac{\sum ت_{د}}{٢} = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$

٢- بتكوين الجدول التراكمي.

الحدود الفعلية	التكرار التراكمي
١٩,٥-٢٩,٥	٣
٢٩,٥-٣٩,٥	١٧
٣٩,٥-٤٩,٥	٣٣
٤٩,٥-٥٩,٥	٥٠
٥٩,٥-٦٩,٥	٦٠

الفئة الوسيطية

التكرار التراكمي السابق

رتبة الوسيط= ٣٠

التكرار التراكمي اللاحق

وبالتالي فإن:

أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة الوسيطية = ٣٩,٥.

$\frac{ن}{٢}$ = رتبة الوسيط = ٣٠

$ن_{١}$ = التكرار التراكمي السابق لرتبة الوسيط = ١٧.

$ت_{ى}$= تكرار الفئة الوسيطية = ٣٣-١٧=١٦.

الآن بتطبيق المعادلة رقم (٩) ينتج:

$$\text{الوسيط} = و = أ + \left[\frac{\frac{ن}{٢} - ن_{١}}{ت_{ى}}\right] \times ل = ٣٩,٥ + \left[\frac{٣٠ - ١٧}{١٦}\right] \times ١٠$$

$$= ٣٩,٥ + \left[\frac{١٣}{١٦}\right] \times ١٠ = ٣٩,٥ + \frac{١٣٠}{١٦}$$

$$= ٣٩,٥ + ٨,١٢٥ = ٤٧,٦٢٥.$$

طريقة النسبة والتناسب: وللتوضيح هذه الطريقة سنورد المثال التالي:

مثال (٦): أوجد الوسيط للجدول التالي:

الفئات	٦٠-٦٧	٦٨-٧٥	٧٦-٨٣	٨٤-٩١	٩٢-٩٩	المجموع
التكرار	٥	٦	٩	١٠	٥	٣٥

الحل: ١- نجد رتبة الوسيط $= \frac{\sum ت_ر}{٢} = \frac{٣٥}{٢} = ١٧,٥$

٢- نقوم بتكوين الجدول التراكمي الصاعد.

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٥٩,٥	صفر
٦٧,٥	٥
٧٥,٥	١١
٨٣,٥	٢٠
٩١,٥	٣٠
٩٩,٥	٣٥

رتبة الوسيط = ١٧,٥

٣- نعمل النسبة والتناسب كالتالي:

٧٥,٥ ← ١١

و ← ١٧,٥

٨٣,٥ ← ٢٠

(٨٣,٥-٧٥,٥)=٨   (١٧,٥-١١)=٦,٥   (٢٠-١١)=٩

وعندئذ: و $= ٧٥,٥ + \frac{٦,٥}{٩} \times ٨ = ٧٥,٥ + \frac{٥٢}{٩}$

$= ٧٥,٥ + ٥,٧٧ = ٨١,٢٧$

مثال (٧): أوجد الوسيط للجدول التالي:

الفئات	١٠-١٧	١٨-٢٥	٢٦-٣٣	٣٤-٤١	المجموع
التكرار	٣	٧	٨	٢	٢٠

الحل: ١- نجد رتبة الوسيط $= \frac{\sum ت_ر}{٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

٢- بتكوين الجدول التراكمي الصاعد.

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٩,٥	صفر
١٧,٥	٣
٢٥,٥	١٠
٣٣,٥	١٨
٤١,٥	٢٠

وبالبحث عن رتبة الوسيط ضمن التكرار التراكمي الصاعد فنجدها وبالتالي فإن الوسيط يساوي الحد الفعلي المقابل للرتبة. وعندئذ: الوسيط = ٢٥,٥ .

الطريقة الهندسية: نقوم برسم المنحنى التراكمي الصاعد (أو الهابط) ونحدد رتبة الوسيط على المحور الرأسي (محور التكرار التراكمي) ومن هذه النقطة (رتبة الوسيط) نمد خط أفقي حتى يتقاطع مع المنحنى التراكمي ومن نقطة التقاطع ننزل عمود حتى يتقاطع مع المحور الأفقي (محور الحدود الفعلية) فتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي هي قيمة الوسيط. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٨): أوجد الوسيط بيانياً للجدول التالي:

الفئات	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	المجموع
التكرار	٣	٧	١٤	٦	١٠	٤٠

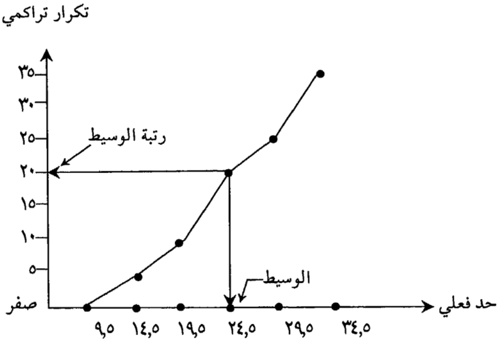
الحل:

١-نحدد رتبة الوسيط = $\frac{\sum ت}{٢} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$

٢- نكون الجدول التراكمي الصاعد.

٣- رسم المنحنى التراكمي الصاعد.

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٩,٥	صفر
١٤,٥	٣
١٩,٥	١٠
٢٤,٥	٢٤
٢٩,٥	٣٠
٣٤,٥	٤٠



ملاحظة: يلاحظ بأن المنحنى التراكمي الصاعد والهابط يتقاطعان في نقطة الإحداثي الأفقي لها الوسيط والإحداثي الرأسي لها رتبة الوسيط.

(٣-٢-٣) في حالة البيانات المتكررة:

لإيجاد الوسيط في هذه الحالة سنورد المثال التالي:

مثال (٩): أوجد الوسيط لأعمار (٣٠) شخص كما هي واردة في الجدول.

العمر (س)	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
التكرارات	٣	٢	٥	١٠	٧	٣

الحل: ١- نجد رتبة الوسيط = $\frac{\text{مجـ ت}}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

٢- نكون الجدول التراكمي الصاعد.

أقل من أو يساوي حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
١٩,٥	صفر
٢٠,٥	٣
٢١,٥	٥
٢٢,٥	١٠
٢٣,٥	٢٠
٢٤,٥	٢٧
٢٥,٥	٣٠

رتبة الوسيط = ١٥

الآن: بطريقة النسبة والتناسب:

	٢٢,٥	←	١٠	
١	و	←	١٥	٥ ، ١٠
	٢٣,٥	←	٢٠	

$$و = ٢٢,٥ + \frac{٥}{١٠} \times ١ = ٢٢,٥ + ٠,٥ = ٢٣$$

(٣-٣) المنوال (The Mode):

تعريفه: هي القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) بين المشاهدات.

كيفية استخراجه:

أولاً: في حالة المشاهدات المفردة:

هي القيمة الأكثر تكراراً بين المشاهدات.

ولتوضيح كيفية استخراجه نورد الأمثلة التالية:

مثال (١): أوجد المنوال في الحالات التالية:

١- ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ١١ ، ٤ ، ٧ ، ٤

٢- ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢

٣- ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٦ ، ٧

٤- ٤ ، ٤ ، ٣، ٣ ، ٦ ، ٦، ١١ ، ١١

٥- ١٤ ، ١٥ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٢

٦- ٢١، ٢١ ، ٢٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٣، ١٧ ، ١٧ ، ٢٣

٧- ١، ٣ ، ٩ ، ٩، ١، ١٠، ١١، ١١

الحل: ١- المنوال = ٤ (لأن المشاهدة ٤ تكررت أكثر من غيرها).

٢- لا يوجد منوال (عديم المنوال) لأن ليس هنالك قيمة تكررت أكثر من غيرها.

٣- هنالك منوالان هما ٤ ، ٦ (لأن تكرار القيمة ٤ = تكرار القيمة ٦=٢).

٤- عديم المنوال (لنفس السبب المذكور في (٢)).

٥- المنوال = $\frac{١٤+١٥}{٢}$ = ١٤,٥ لأن القيمتين ١٤ ، ١٥ لهما نفس التكرار ولم يفصل

بينهما فاصل، وبالتالي فالمنوال هو وسطهما الحسابي.

٦- عديم المنوال لأن ليس هنالك قيمة تكررت أكثر من غيرها.

٧- هنالك ثلاثة منوالات هي: ١، ٩، ١١ لأن تكرارها متساوي.

ثانيا: في حالة الجداول التكرارية:

ليكن لدينا جـدول تكـراري مراكـز فئاتـه هـي: $س_١$، ... ، $س_م$ والتكـرارات المقابلة هي $ت_١$، $ت_٢$، ....، $ت_م$. سنجد المنوال بثلاثة طرق هي:

١- طريقة الفروق لبيرسون:

$$\text{المنوال} = أ + \left[\frac{ف_١}{ف_١+ف_٢}\right] \times ل \qquad \text{.................. (١٠)}$$

حيث: أ = الحد الأدنى للفئة المنوالية.

الفئة المنوالية: هي تلك الفئة التي تقابل أكبر تكرار.

$ف_١$= تكرار الفئة المنوالية- تكرار الفئة التي تسبق الفئة المنوالية.

$ف_٢$= تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي تلحق الفئة المنوالية.

ل = طول الفئة المنوالية.

= الحد الأعلى الفعلي للفئة المنوالية - الحد الأدنى الفعلي للفئة المنوالية.

مثال (٢): إليك الجدول التالي:

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩
التكرار	٦	٧	١٠	٩

استخدم طريقة الفروق لبيرسون لإيجاد المنوال.

الحل: ١- الفئة المنوالية (٤٠-٤٤).

٢- أ = الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠.

٣- $ف_١$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي تسبق الفئة المنوالية = ١٠-٧ = ٣

$ف_٢$ = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي تلحق الفئة المنوالية = ١٠-٩= ١

٤- ل=طول الفئة المنوالية=الحد الأعلى الفعلي للفئة المنوالية-الحد الأدنى الفعلي لها.

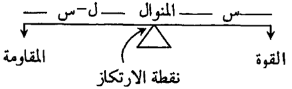
= ٤٤,٥-٣٩,٥= ٥

٥- بتطبيق القانون الوارد في المعادلة (١٠) ينتج:

$$\text{المنوال} = \text{أ} + \left[\frac{\text{ف}_{١}}{\text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢}}\right] \times \text{ل} = ٤٠ + \left[\frac{٣}{١ + ٣}\right] \times ٥$$

$$٤٠ + \left[\frac{٣}{٤}\right] \times ٥ = ٤٠ + ٣٫٧٥ = ٤٣٫٧٥$$

٢- طريقة الرافعة: تعتمد هذه الطريقة على مبدأ فيزيائي، ومن موضوع الرافعة والقوة والمقاومة حيث يشبه المنوال نقطة الارتكاز، وأحد حدي الفئة المنوالية نهاية الرافعة من جهة القوة والآخر نهايتها من جهة المقاومة وبذلك يكون طول الفئة ممثلاً لطول الرافعة وبذلك يمكن تمثيل تكرار الفئة قبل المنوالية بالقوة وتكرار الفئة بعد المنوالية بالمقاومة [لاحظ الشكل المجاور].



وحتى تتزن الرافعة يجب أن يكون:

العزوم الموجبة = العزوم السالبة

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها.

لنفترض بأن تكرار الفئة قبل المنوالية $= \text{ت}_{١} =$ القوة

تكرار الفئة بعد المنوالية $= \text{ت}_{٢} =$ المقاومة

وعندئذ فإن: $\text{ت}_{١} \times \text{س} \quad = \text{ت}_{٢} \times (\text{ل} - \text{س})$

ومنها: $\text{ت}_{١} \times \text{س} \quad = \text{ت}_{٢} \times \text{ل} - \text{ت}_{٢} \times \text{س}$

$\Leftarrow (\text{ت}_{١} + \text{ت}_{٢})\text{س} \quad = \text{ت}_{٢} \times \text{ل}$

$$\Leftarrow \text{س} = \left(\frac{\text{ت}_{٢}}{\text{ت}_{١} + \text{ت}_{٢}}\right) \times \text{ل}$$

وبالتالي: المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\left(\frac{\text{ت}_{٢}}{\text{ت}_{١} + \text{ت}_{٢}}\right) \times \text{ل}$ ....(١١)

مثال (٣): للجدول التالي:

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩
التكرار	٦	٧	١٠	٩

احسب المنوال بطريقة الرافعة.

الحل: ١- الفئة المنوالية هي (٤٠-٤٤).

٢- الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠.

٣- $ت_١$ = تكرار الفئة قبل المنوالية = ٧

$ت_٢$ = تكرار الفئة بعد المنوالية = ٩

ل = طول الفئة المنوالية = الحد الأعلى الفعلي لها - الحد الأدنى الفعلي لها.

= ٤٤,٥ - ٣٩,٥ = ٥ .

٤- بتطبيق الصيغة الواردة في المعادلة رقم (١١) ينتج:

$$\text{المنوال} = ٤٠ + \left[\frac{٩}{٧+٩}\right] \times ٥ = ٤٠ + \left(\frac{٩}{١٦}\right) \times ٥ \; .$$

$$٤٠ + \frac{٤٥}{١٦} = ٤٠ + ٢,٨١ = ٤٢,٨١$$

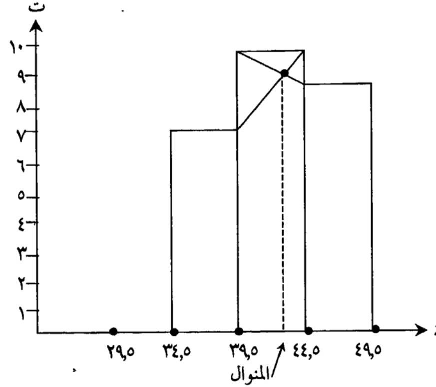
ملاحظة: يختلف المنوال باختلاف طريقة حسابه كما هو ملاحظ بالمقارنة بين الإجابتين في المثال (٢) و (٣).

٣- طريقة الرسم البياني: يتم استخراج المنوال بيانياً بواسطة استخدام المستطيلات التي تمثل تكرار الفئة قبل المنوالية وتكرار الفئة بعد المنوالية حيث نصل الزاوية اليمنى العليا للمستطيل الذي يمثل الفئة المنوالية بالزاوية التي تماثلها في مستطيل الفئة قبل المنوالية ونصل الزاوية اليسرى العليا بالمستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المنوالية بالزاوية التي تماثلها في المستطيل الفئة بعد المنوالية فيتقاطع المستقيمان في نقطة داخل المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المنوالية، ننزل من نقطة التقاطع عموداً على المحور الأفقي حيث يقطعه في نقطة هي المنوال. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٤): استخرج المنوال بيانياً للجدول التالي:

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٩	٤٥-٤٩
التكرار	٦	٧	١٠	٩

الحل:



ملاحظة: إذا كان الجدول التكراري غير منتظم يجب عندها تعديل التكرارات لحساب المنوال بيانياً حيث التكرار المعدل يعطى بالعلاقة:

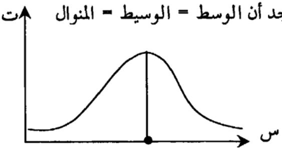
$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

تعريف: المنوال التقريبي: هو مركز الفئة الأكثر تكراراً.

وفي مثال (٤) يكون المنوال التقريبي $= ٤٠ + \frac{٤٥}{١٦} = ٤٠ + ٢,٨١ = ٤٢,٨١$

(٣-٤) العلاقة بين الوسط والوسيط والمنوال:

١- في التوزيعات المتماثلة (أحادية المنوال) وجد أن الوسط = الوسيط = المنوال لاحظ الشكل المجاور (شكل ١).



الوسط = الوسيط= المنوال
شكل (١)

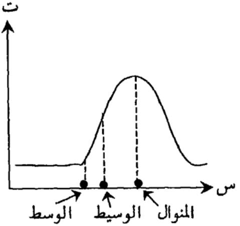
٢- في التوزيعات التكرارية الملتوية التواءاً بسيطاً (أحادية المنوال) جد أن هنالك علاقة بين الوسط والوسيط والمنوال. وأن الوسيط يقع بين

الوسط والمنوال والعلاقة هي:

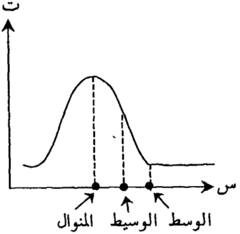
الوسط الحسابي −المنوال = ٣ (الوسط الحسابي− الوسيط)

$$\overline{\text{س}} - \text{م} = ٣ \left(\overline{\text{س}} - \text{و}\right) \qquad \text{.................................} \quad (١٢)$$

لاحظ الشكلين (٢) & (٣).



ملتوٍ نحو اليسار (سالب الالتواء)



ملتوٍ نحو اليمين (موجب الالتواء)

مثال (١): في توزيع أحادي المنوال (ملتوي التواءاً بسيطاً) وجد أن $\overline{\text{س}} = ٥٠$، و$=٥٥$ أوجد المنوال (م).

الحل: باستخدام العلاقة (١٢)

$$\overline{\text{س}} - \text{م} = ٣ \left(\overline{\text{س}} - \text{و}\right)$$

$$٥٠ - \text{م} = ٣(٥٠ - ٥٥) \Leftarrow ٥٠ - \text{م} = -١٥$$

$$\Leftarrow \text{م} = ٦٥.$$

مثال (٢): في توزيع أحادي المنوال، وجد أن م = ٧٠ ، و = ٦٥ أوجد الوسط الحسابي.

الحل: باستخدام العلاقة الواردة في (١٢).

$$\overline{\text{س}} - \text{م} = ٣\left(\overline{\text{س}} - \text{و}\right) \Leftarrow \overline{\text{س}} - ٧٠ = ٣\left(\overline{\text{س}} - ٦٥\right)$$

ومنها $\overline{\text{س}} - ٧٠ = ٣\overline{\text{س}} - ١٩٥ \Leftarrow ٣\overline{\text{س}} - \overline{\text{س}} = ١٩٥ - ٧٠$

$\Leftarrow ٢\overline{\text{س}} = ١٢٥$ وبالتالي $\overline{\text{س}} = \frac{١٢٥}{٢} = ٦٢{,}٥$

(٣-٥) خصائص مقاييس النزعة المركزية ومقارنة بين صفات الوسط والوسيط والمنوال:

١- الوسط الحسابي هو متوسط لقيم المجموعة وليس لمنازل المجموعة كما هو الحال في الوسيط والمنوال.

٢- يتأثر الوسط الحسابي بجميع قيم المجموعة وليس كالوسيط والمنوال.

٣- يتأثر الوسط الحسابي بالقيم المتطرفة لذلك يصبح مضللاً في بعض الحالات لذلك لا يفضل استخدامه والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (١): استخرج الوسط الحسابي للقيم التالية: ٢، ٨، ١٠، ٢٠٠٠ .

الحل: $\frac{٢+٨+١٠+٢٠٠٠}{٤} = \frac{٢٠٢٠}{٤} = ٥٠٥$

فنلاحظ هنا أن الوسط الحسابي انجذب نحو القيمة المتطرفة ولم يعبر عن القيم الأخرى.

٤- سهولة فهمه وحسابه.

٥- سهولة إجراء العمليات الحسابية عليه، وبالتالي استطعنا إيجاد الوسط الحسابي الناتج عن دمج المجموعات.

٦- يمكن إيجاد مجموع القيم إذا عرف الوسط الحسابي وعدد القيم.

مثال (٢): أوجد مجموع القيم لمجموعة وسطها الحسابي(٣٠) وعدد مفرداتها (٢٠).

الحل: مجموع القيم $= \sum$ س ر = الوسط الحسابي × عدد القيم.

$= \overline{س} \times ن = ٣٠ \times ٢٠ = ٦٠٠$

٧- يمكن إيجاد عدد القيم إذا عرف الوسط الحسابي ومجموع القيم حسب الصيغة التالية:

$$\text{عدد القيم} = ن = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{\sum س_ر}{\overline{س}}$$

مثال (٣): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في الإحصاء = ٦٥، مجموع العلامات = ٣٢٥٠ أوجد عدد طلبة هذه الشعبة.

الحل:

$$ن = \frac{\text{مجموع العلامات}}{\text{الوسط الحسابي}} = \frac{٣٢٥٠}{٦٥} = ٥٠$$

٨- مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي يساوي الصفر.

أي أن : $\sum (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر} : \sum (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}) \times \text{ت}_{\text{ر}} = \text{صفر}$.

مثال (٤): للقيم التالية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، أوجد مجموع انحرافات هذه القيم عن وسطها الحسابي.

الحل:

نجد أولاً: $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

$= \sum (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}) = \sum (\text{س}_{\text{ر}} - ٣)$

$= (١-٣) + (٢-٣) + (٣-٣) + (٤-٣) + (٥-٣)$.

$= -٢ + -١ + \text{صفر} + ١ + ٢ = \text{صفر}$

مثال (٥): إذا كان انحرافات خمسة قيم عن وسطها الحسابي هي : أ ، ٢أ ، ٧-٥أ، ٢، -٣ أوجد قيمة أ .

الحل: بما أن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

فإن: أ + ٢أ + ٧- ٥أ + ٢ + -٣ = صفر

⇐ ٦-٢أ = صفر ⇐ أ = ٣

مثال (٦): إذا كان $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} \text{س}_{\text{ر}} = ٢٠٠$ أوجد $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} (\text{س}_{\text{ر}} - ٢٠)$

الحل:

بما أن $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} \text{س}_{\text{ر}} = ٢٠٠$ فإن $\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} = \frac{٢٠٠}{١٠} = ٢٠$

وهذا يعني بأن $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠} (\text{س}_{\text{ر}} - ٢٠) = \sum_{\text{ر}=١}^{١٠} (\text{س} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر}$

٩- مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال (٧): للقيم التالية: ١، ٢،٣،٤،٥ أوجد مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي ثم مجموع مربعات الانحرافات عن القيمة (٤) ثم قارن بين النتيجتين.

الحل: نجد أولاً $\bar{س} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي $= \sum (س_ر - ٣)^٢ = (١-٣)^٢ + (٢-٣)^٢$
$+ (٣-٣)^٢ + (٤-٣)^٢ + (٥-٣)^٢ = ٤ + ١ + ٠ + ١ + ٤ = ١٠$

مجموع مربعات انحرافات القيم عن القيمة (٤) $= \sum (س_ر - ٤)^٢ = (١-٤)^٢ + (٢-٤)^٢$
$+ (٣-٤)^٢ + (٤-٤)^٢ + (٥-٤)^٢ = ٩ + ٤ + ١ + ٠ + ١ = ١٥$

وبالمقارنة نلاحظ أن: $\sum (س_ر - \bar{س})^٢ = ١٠ < \sum (س_ر - ٤)^٢ = ١٥$ وهذا يثبت الخاصية.

١٠- الوسط الحسابي هو نقطة اتزان للمدرج التكراري، وبما ان الوسط الحسابي هو نقطة اتزان للتوزيع، فإنه إذا أضفنا عدد من القيم التي قيمتها مساوية للوسط الحسابي إلى البيانات فإن هذه الإضافة لا تؤثر ولكن إذا أضفنا مفردات تختلف قيمتها عن قيمة الوسط الحسابي فإن قيمته تتغير.

١١- لا يمكن حساب الوسط الحسابي في حالة الجداول المفتوحة، لذا نلجأ في حالة الجداول المفتوحة إلى حساب الوسيط والمنوال.

١٢- الوسيط سهل التعريف وسهل الحساب ولا يتأثر بالقيم الشاذة.

١٣- يعتبر الوسيط مقياس موضع فإنه لا يعتمد على جميع القيم دائماً فتغير بعض القيم قد تؤثر عليه وقد لا تؤثر عليه.

١٤- يستعمل الوسيط خاصة في البيانات التي يعرف ترتيبها ولا تعرف قيمها وكذلك في البيانات الناقصة، لذلك يمكن استخراجه في الجداول المفتوحة.

١٥- إذا أخذت عينة من مجتمع ما وأخذت عينة أخرى من نفس المجتمع فإننا نجد تقارباً بين الوسطين الحسابين لهاتين العينتين أكثر من التقارب بين وسطيهما لذلك فإن الوسط الحسابي أكثر ثبوتاً من الوسيط.

١٦- المنوال لا يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة) لذلك يمكن حسابه من الجداول المفتوحة.

١٧- يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استخدامه لإيجاد متوسط للظواهر التي لا يمكن قياسها رقمياً (كمياً) مثل الصفات فهو الصفة الأكثر شيوعاً.

١٨- يفضل استخدام الوسط الحسابي إذا كان التوزيع متماثلاً واهتمامنا منصب على القيمة العددية لجميع القيم (البيانات) بدلاً من قيمة نموذجية.

١٩- يفضل استخدام الوسيط إذا أردنا إيجاد قيمة نموذجية (ممثلة) وإذا كان التوزيع ملتوياً.

٢٠- أثر التحويلات الخطية: إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات (المفردة أو المبوبة) وسطها الحسابي ($\overline{س}$) والوسيط لها ($و_{س}$) والمنوال ($م_{س}$).

وعدلت هذه المشاهدات طبقاً للمعادلة:

ص = أ س + ب حيث أ ، ب إعداد حقيقية.

ص: المشاهدة بعد التعديل، س: المشاهدة قبل التعديل.

فإن جميع المقاييس (الوسط والوسيط والمنوال) تتأثر بهذا التعديل وبذلك يكون:

الوسط الحسابي بعد التعديل = أ × الوسط الحسابي قبل التعديل + ب

$$\overline{ص} = أ\overline{س} + ب$$

الوسيط بعد التعديل = أ × الوسيط قبل التعديل + ب

$$و_{ص} = أ . و_{س} + ب$$

المنوال بعد التعديل = أ × المنوال قبل التعديل + ب

$$م_{ص} = أ . م_{س} + ب$$

وهذا يعني بأن هذه المقاييس تتأثر بالعمليات الحسابية الأربعة.

مثال (٨): إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لعلامات شعبة ما في مادة الفيزياء هي على الترتيب ٩٠، ٧٢، ٦٦ وأجرينا التعديل التالي:

$$ص = \frac{١}{٣}س + ٣٥$$

حيث س : العلامة قبل التعديل، ص : العلامة بعد التعديل.

أوجد الوسط والوسيط والمنوال بعد التعديل.

الحل: بما أن $\overline{س} = ٩٠$، $و_{س} = ٧٢$ ، $م_{س} = ٦٦$ فإن:

$$\overline{ص} = \frac{١}{٣}\overline{س} + ٣٥ = \frac{١}{٣} \times ٩٠ + ٣٥ = ٣٠ + ٣٥ = ٦٥$$

$$و_{ص} = \frac{١}{٣}و_{س} + ٣٥ = \frac{١}{٣} \times ٧٢ + ٣٥ = ٢٤ + ٣٥ = ٥٩$$

$$م_{ص} = \frac{١}{٣}م_{س} + ٣٥ = \frac{١}{٣} \times ٦٦ + ٣٥ = ٢٢ + ٣٥ = ٥٧$$

مثال (٩): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في الإحصاء (٦٠) وعدد طلاب الشعبة (٣٠) راجع المدرس ثلاثة طلاب فزادت علامة الأول (٥) علامات وزادت علامة الثاني (٦) علامات بينما نقصت علامة الثالث (٤) علامات أوجد الوسط الحسابي بعد عملية المراجعة.

الحل: سنجد الحل بطريقتين.

الطريقة الأولى: مجموع العلامات قبل المراجعة = الوسط الحسابي × عدد الطلبة

$$= ٦٠ \times ٣٠ = ١٨٠٠$$

مجموع العلامات بعد المراجعة=مجموع العلامات قبل المراجعة+مقدار الزيادة والنقصان

$$= ١٨٠٠+٥+٦-٤ = ١٨٠٧$$

وبالتالي الوسط الحسابي بعد المراجعة $= \frac{\text{مجموع العلامات بعد المراجعة}}{\text{عدد الطلبة}} = \frac{١٨٠٧}{٣٠} = ٦٠,٢٣$.

الطريقة الثانية:

الوسط الحسابي بعد المراجعة = الوسط الحسابي قبل المراجعة+ $\frac{\text{مقدار الزيادة أو النقصان}}{\text{عدد طلاب الشعبة}}$

الوسط الحسابي بعد المراجعة $= ٦٠ + \frac{٥+٦-٤}{٣٠}$

$$= ٦٠ + \frac{٧}{٣٠} = ٦٠ + ٠,٢٣ = ٦٠,٢٣$$

مثال (١٠): إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لعلامات شعبة ما في مادة الإحصاء هي على الترتيب ٦٠ ، ٤٥، ٣٠ وأجرى المدرس التعديل التالي:

$ص = ٩٠ - \frac{١}{٥}س$ أوجد المقاييس الثلاثة بعد التعديل

الحل: بما أن $\overline{س} = ٦٠$ ، $و_{س} = ٤٥$ ، $م_{س} = ٣٠$ فإن:

$$\overline{ص} = ٩٠ - \frac{١}{٥}\overline{س} = ٩٠ - \frac{١}{٥}(٦٠) = ٩٠ - ١٢ = ٧٨$$

$$و_{ص} = ٩٠ - \frac{١}{٥}و_{س} = ٩٠ - \frac{١}{٥}(٤٥) = ٩٠ - ٩ = ٨١$$

$$م_{ص} = ٩٠ - \frac{١}{٥}م_{س} = ٩٠ - \frac{١}{٥}(٣٠) = ٩٠ - ٦ = ٨٤$$

(٣-٦) المئينات والربيعات والعشيرات: (Percentiles,Quartiles & Deciles)

(٣-٦-١) المئينات:

لاحظنا من تعريف الوسيط بأنه هو النقطة على المحور الأفقي التي تقسم المساحة تحت المضلع التكراري إلى قسمين متساويين. أما المقياس الذي يقسم المساحة إلى مئة جزء متساوي فهو المئين، وبالتالي يمكن تعريف المئين رقم ك ($م_{ك}$) بأنه تلك القيمة على المحور الأفقي التي يسبقها أو يساويها ك٪ من البيانات ويليها (١٠٠-ك)٪ من البيانات. فمثلاً، نعني بالمئين الخامس هو تلك القيمة التي يسبقها ٥٪ من البيانات ويليها ٩٥٪ من البيانات .... وهكذا.

كيفية حسابه:

أولاً: في حالة المشاهدات المفردة:

خطوات حسابه:

١- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

٢- نستخرج رتبة المئين رقم ك حيث أن رتبة المئين رقم ك = رتبة $م_{ك} = \frac{ك}{١٠٠} \times (ن+١)$. حيث ن: عدد المشاهدات .

٣- تكون قيمة المئين رقم ك هي تلك القيمة التي تقابل الرتبة.

مثال (١): للبيانات التالية: ١١، ١٧، ١٦، ١٥، ١٤، ٢٠، ٢٤، ٢٩، ٩، أوجد:

١- المئين العاشر ($م_{١٠}$). ٢- المئين الخمسون($م_{٥٠}$).

٣-المئين التسعون ($م_{٩٠}$) ٤- المئين الستون ($م_{٦٠}$).

الحل: نرتب المشاهدات تصاعدياً كما في الجدول التالي :

القيمة	٩	١١	١٤	١٥	١٦	١٧	٢٠	٢٤	٢٩
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

عدد المشاهدات = ن = ٩ .

١- رتبة $م_{١٠} = \frac{١٠}{١٠٠}(٩+١) = \frac{١٠}{١٠٠} \times ١٠ = ١$ تكون قيمة $م_{١٠}$ هي المشاهدة التي ترتيبها الأول الرتبة الأولى. وهنا تساوي ٩ وبالتالي $م_{١٠}$ = ٩

٢- رتبة $م_{٥٠} = \frac{٥٠}{١٠٠}(٩+١) = \frac{٥٠}{١٠٠} \times ١٠ = ٥$

قيمة $م_{٥٠}$ = المشاهدة التي رتبتها الخامسة = ١٦.

٣- رتبة $م_{٩٠} = \frac{٩٠}{١٠}(٩+١) = \frac{٩٠}{١٠} \times ١٠ = ٩$

قيمة $م_{٩٠}$ = المشاهدة التي رتبتها التاسعة = ٢٩.

٤- رتبة $م_{٦٠}$ = $م_{٦٠} = \frac{٦٠}{١٠٠} \times (٩+١) = \frac{٦٠}{١٠٠} \times ١٠ = ٦$

قيمة $م_{٦٠}$= المشاهدة التي رتبتها السادسة = ١٧.

مثال (٢): للبيانات التالية: -٦، -١٩، ٢٠، ٢٤، ٢٥، ١٩ استخرج $م_{٥}$، $م_{٢٥}$ وفسر معناهما.

الحل: نرتب المشاهدات تصاعدياً كما في الجدول التالي :

القيمة	-١٩	-٦	١٩	٢٠	٢٤	٢٥
الترتيب	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس

عدد المشاهدات = ن = ٦

١- رتبة $م_{٥} = \frac{٥}{١٠٠} \times (ن+١) = \frac{٥}{١٠٠} \times (٦+١) = \frac{٥}{١٠٠} \times ٧ = \frac{٣٥}{١٠٠} = ٠{,}٣٥$

تفسيره: المئين الخامس يقع قبل المشاهدة الأولى.

٢- رتبة $م_{٢٥} = \frac{٢٥}{١٠٠} \times (٦+١) = \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٧ = \frac{١٧٥}{١٠٠} = ١{,}٧٥$

تفسيره:المئين الخامس والعشرون يقع بين المشاهدتين الأولى والثانية لكنه أقرب للثانية.

ثانيا: في حالة الجداول التكرارية (الفئات): هنالك ثلاثة طرق لحسابه هي:

(١) طريقة القانون:

خطوات حسابه:

١- تكوين الجداول التراكمي (حدود فعلية + تكرار تراكمي).

٢- تحديد رتبة المئين حيث رتبة المئين رقم ك يعطى بالعلاقة.

رتبة $م_{ك} = \frac{ك}{١٠٠} \times$ مجموع التكرارات = $\frac{ك}{١٠٠} \times \sum ت_{ر}$

٣- تحديد الفئة المئينية. والفئة المئينية هي تلك الفئة التي تكرارها التراكمي يزيد عن رتبة المئين.

٤- نطبق القانون التالي:

$$\text{المئين رقم ك} = م_ك = أ + \left[\frac{\text{رتبة } م_ك - ن_١}{ت_م}\right] \times ل \quad .... \quad (١٣)$$

حيث أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة المئينية.

$ن_١$ = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة المئينية.

$ت_م$ = تكرار الفئة المئينية.

ل = طول الفئة المئينية = الحد الأعلى الفعلي لها- الحد الأدنى الفعلي لها.

مثال (٣): إليك الجدول التالي:

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٢	٣	٣٠

أوجد ما يلي: (١) $م_١$ (٢) $م_{١٥}$ (٣) $م_{٧٥}$ (٤) $م_{٦٠}$

الحل: بتكوين الجدول التراكمي.

الفئات	ت	الحدود الفعلية	التكرار التراكمي
٢٥-٢٩	صفر	٢٤,٥-٢٩,٥	صفر
٣٠-٣٤	٥	٢٩,٥-٣٤,٥	٥
٣٥-٣٩	١٠	٣٤,٥-٣٩,٥	١٥
٤٠-٤٤	١٢	٣٩,٥-٤٤,٥	٢٧
٤٥-٤٩	٣	٤٤,٥-٤٩,٥	٣٠
المجموع	٣٠		

١- رتبة $م_١ = \frac{١}{١٠٠} \times مج ك = \frac{١}{١٠٠} \times ٣٠ = ٠,٣$

الفئة المئينية: (٢٩,٥-٣٤,٥)⟸ أ = الحد الأدنى الفعلي للفئة المئينية = ٢٩,٥.

$\text{ن}_{١}$ = التكرار التراكمي الذي يسبق الفئة المئينية = صفر.

$\text{ت}_{\text{م}}$ = تكرار الفئة المئينية = ٥

ل = طول الفئة المئينية = الحد الأعلى الفعلي - الحد الأدنى الفعلي =

٣٤,٥-٢٩,٥= ٥

الآن بتطبيق الصيغة الواردة في المعادلة (١٣).

$$\text{م}_{١} = \text{أ} + \left[\frac{\text{رتبة المئين} - \text{ن}_{١}}{\text{ت}_{\text{م}}}\right] \times \text{ل} = \text{٢٩,٥} + \left[\frac{\text{٠,٣} - \text{صفر}}{\text{٥}}\right] \times \text{٥}$$

$$= \text{٢٩,٥} + \text{٠,٣} = \text{٢٩,٨}$$

٢- $\text{رتبة م}_{١٥} = \frac{\text{١٥}}{\text{١٠٠}} \times \text{٣٠} = \text{٤,٥}$

الفئة المئينية (٢٩,٥-٣٤,٥) ⇐ أ = ٢٩,٥

$\text{ن}_{١}$= صفر، $\text{ت}_{\text{م}}$ = ٥ ، ل = ٥

$$\text{م}_{١٥} = \text{أ} + \left[\frac{\text{رتبة م}_{١٥} - \text{ن}_{١}}{\text{ت}_{\text{م}}}\right] \times \text{ل} = \text{٢٩,٥} + \left[\frac{\text{٤,٥} - \text{صفر}}{\text{٥}}\right] \times \text{٥}$$

$$= \text{٢٩,٥} + \text{٤,٥} = \text{٣٤}.$$

٣- $\text{رتبة م}_{٧٥} = \frac{\text{٧٥}}{\text{١٠٠}} \times \text{٣٠} = \text{٢٢,٥}$

الفئة المئينية (٣٩,٥-٤٤,٥) ⇐ أ = ٣٩,٥.

$\text{ن}_{١}$ = ١٥ ، $\text{ت}_{\text{م}}$ = ١٢ ، ل = ٥

$$\text{م}_{٧٥} = \text{أ} + \left[\frac{\text{رتبة م}_{٧٥} - \text{ن}_{١}}{\text{ت}_{\text{م}}}\right] \times \text{ل} = \text{٣٩,٥} + \left[\frac{\text{٢٢,٥} - \text{١٥}}{\text{١٢}}\right] \times \text{٥}$$

$$\text{٣٩,٥} + \left(\frac{\text{٧,٥}}{\text{١٢}}\right) \times \text{٥} = \text{٣٩,٥} + \left(\frac{\text{٣٧,٥}}{\text{١٢}}\right) = \text{٣٩,٥} + \text{٣,١٢٥} = \text{٤٢,٦٢٥}$$

٤- $\text{رتبة م}_{٦٠} = \frac{\text{٦٠}}{\text{١٠٠}} \times \text{٣٠} = \text{١٨}$

الفئة المئينية (٣٩,٥-٤٤,٥) ⇐ أ = ٣٩,٥

$\text{ن}_{1} = ١٥$ ، $\text{ت}_{\text{م}} = ١٢$ ، $\text{ل} = ٥$

$$\text{م}_{٦٠} = ٣٩{,}٥ + \left[\frac{١٨ - ١٥}{١٢}\right] \times ٥ = ٣٩{,}٥ + \left(\frac{٣}{١٢}\right) \times ٥$$

$$= ٣٩{,}٥ + ١{,}٢٥ = ٤٠{,}٧٥$$

الطريقة الثانية: (النسبة والتناسب):

خطوات الحل:

١- تكوين الجدول التراكمي الصاعد (حد فعلي+ تكرار تراكمي صاعد).

٢- تحديد رتبه المئين.

٣- نبحث عن رتبه المئين ضمن التكرار التراكمي فإذا وجدناها يكون المئين هو الحد الفعلي المقابل لها وإذا لم نجدها نجري النسبة والتناسب على النحو التالي:

ل=طول الفئة المئينية

الحد الفعلى المقابل لـ $\text{ت}_{\text{س}}$ ← التكرار التراكمي السابق للرتبة ($\text{ت}_{\text{س}}$)

$\text{م}_{\text{ك}}$ ← رتبة $\text{م}_{\text{ك}}$

الحد الفعلي المقابل لـ $\text{ت}_{\text{ق}}$ ← التكرار التراكمي اللاحق للرتبة ($\text{ت}_{\text{ق}}$)

س ، ص

حيث س = رتبة $\text{م}_{\text{ك}}$ − $\text{ت}_{\text{س}}$ ؛ ص = $\text{ت}_{\text{ق}}$ − $\text{ت}_{\text{س}}$

وعندئذ: $\text{م}_{\text{ك}}$ = الحد الفعلي المقابل لـ $\text{ت}_{\text{س}} + \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) \times \text{ل}$ .... (١٤)

مثال (٤): إليك الجدول التالي:

الفئات	١٠-١٩	٢٠-٢٩	٣٠-٣٩	٤٠-٤٩	٥٠-٥٩	المجموع
التكرار	٣	٢	٥	٧	٨	٢٥

أوجد (١) $\text{م}_{٤}$ (٢) $\text{م}_{٢٠}$ (٣) $\text{م}_{٥٠}$ (٤) $\text{م}_{٨٥}$ (٥) $\text{م}_{٦٢}$

الحل: بتكوين الجدول التراكمي الصاعد:

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٠-٩	صفر	٩,٥	صفر
١٠-١٩	٣	١٩,٥	٣
٢٠-٢٩	٢	٢٩,٥	٥
٣٠-٣٩	٥	٣٩,٥	١٠
٤٠-٤٩	٧	٤٩,٥	١٧
٥٠-٥٩	٨	٥٩,٥	٢٥
المجموع	٢٥		

(١) $\text{رتبة م}_{٤} = \frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥ = ١$

رتبة $\text{م}_{٤}$

$٩,٥ \leftarrow \text{صفر}$

$\text{م}_{٤} \leftarrow ١$

$١٩,٥ \leftarrow ٣$

$١٩,٥ - ٩,٥ = ١٠$ ، $(١ - ٠) = ١$ ، $(٣ - ٠) = ٣$

$\text{م}_{٤} = ٩,٥ + \frac{١}{٣} \times ١٠ = ٩,٥ + ٣,٣٣ = ١٢,٨٣$

٢- $\text{رتبة م}_{٢٠} = \frac{٢٠}{١٠٠} \times ٢٥ = ٥$

وبما أن رتبة $\text{م}_{٢٠}$ موجودة ضمن التكرار التراكمي فإن $\text{م}_{٢٠}$ = الحد الفعلي المقابل للرتبة وهذا يعني بأن $\text{م}_{٢٠}$ = ٢٩,٥

٣- $\text{رتبة م}_{٢٠} = \frac{٥٠}{١٠٠} \times ٢٥ = ١٢,٥$

$\text{ت}_{\text{س}}$ = التكرار التراكمي السابق لرتبة المئين = ١٠.

$\text{ت}_{\text{ق}}$ = التكرار التراكمي اللاحق لرتبة المئين = ١٧.

ل = طول الفئة المئينية=الحد الفعلي المقابل لـ $\text{ت}_{\text{ق}}$ -الحد الفعلي المقابل لـ $\text{ت}_{\text{س}}$

= ٤٩,٥-٣٩,٥ = ١٠

س = رتبة المئين $\text{م}_{٥٠}$ - $\text{ت}_{\text{س}}$ = ١٢,٥ - ١٠ = ٢,٥

ص = $\text{ت}_{\text{ق}}$ - رتبة $\text{م}_{٥٠}$ = ١٧-١٢,٥ = ٤,٥

الآن باستعمال الصيغة (١٤).

$$\text{م}_{٥٠} = \text{الحد الفعلي المقابل لـ ت}_{\text{س}} + \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) \times \text{ل}$$

$$= ٣٩,٥ + \left(\frac{٢,٥}{٤,٥}\right) \times ١٠ = ٣٩,٥ + ٥,٥٥ = ٤٥,٠٥$$

٤- رتبة $م_{٨٥} = \frac{٨٥}{١٠٠} \times ٢٥ = ٢١,٢٥$

الآن: بعمل النسبة والتناسب.

$$(١٠)\left[\begin{array}{ccc} ٤٩,٥ & \leftarrow & ١٧ \\ م_{٨٥} & \leftarrow & ٢١,٢٥ \\ ٥٩,٥ & \leftarrow & ٢٥ \end{array}\right] (٤,٢٥) \quad (٨)$$

❖ $م_{٨٥} = ٤٩,٥ + \left(\frac{٤,٢٥}{٨}\right) \times ١٠ = ٤٩,٥ + ٥,٣١٢٥ = ٥٤,٨١٢٥$

٥- رتبة $م_{٦٨} = \frac{٦٨}{١٠٠} \times ٢٥ = ١٧$

وبما أن رتبة ٦٨ ظاهرة خلال التكرار التراكمي ⇐ $م_{٦٨}$ = الحد الأعلى الفعلي المقابل لها = ٤٩,٥.

الطريقة الثالثة: (الطريقة البيانية):

خطوات الحل:

١- تكوين الجدول التراكمي الصاعد.

٢- رسم المنحنى (المضلع) التراكمي الصاعد.

٣- تحديد رتبة المئين.

٤- تعيين رتبة المئين على المحور العمودي (محور التكرار التراكمي) ومن هذه النقطة رسم خط أفقي حتى يتقاطع مع المنحنى (المضلع) التراكمي ومن نقطة التقاطع ننزل عمود على المحور الأفقي فتكون نقطة الالتقاء مع المحور الأفقي هي قيمة المئين.

مثال (٥): إليك الجدول التالي:

الفئات	٤٠-٤٨	٤٩-٥٧	٥٨-٦٦	٦٧-٧٥	المجموع
التكرار	٥	٦	١١	١٨	٤٠

أوجد بيانياً: (١) $م_{١٠}$ (٢) $م_{٣٥}$ (٣) $م_{٦٥}$

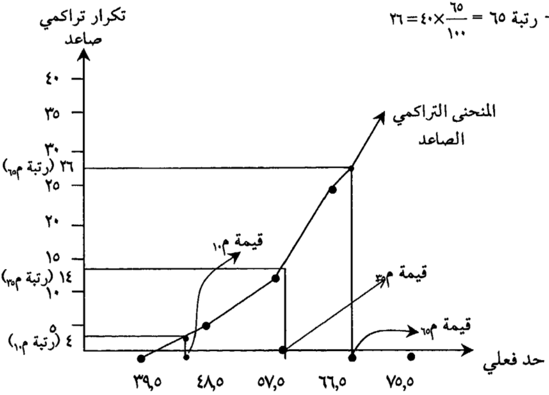
الحل: بتكوين الجدول التراكمي الصاعد.

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٣١-٣٩	صفر	٣٩٫٥	صفر
٤٠-٤٨	٥	٤٨٫٥	٥
٤٩-٥٧	٦	٥٧٫٥	١١
٥٨-٦٦	١١	٦٦٫٥	٢٢
٦٧-٧٥	١٨	٧٥٫٥	٤٠
المجموع	٤٠		

١- رتبة م١٠ = $\frac{\text{١٠}}{\text{١٠٠}} \times \text{٤٠} = \text{٤}$

٢- رتبة م ٣٥ = $\frac{\text{٣٥}}{\text{١٠٠}} \times \text{٤٠} = \text{١٤}$

٣- رتبة ٦٥ = $\frac{\text{٦٥}}{\text{١٠٠}} \times \text{٤٠} = \text{٢٦}$



ملاحظة: من خلال التعريف يتضح بأن المثين الخمسون هو الوسيط.

(٣-٦-٢) الربيعات (Quartiles):

الربيع هو المقياس الذي يقسم المساحة تحت المضلع التكراري لتوزيع ما إلى أربعة أجزاء متساوية. لذلك فإن هنالك ثلاثة ربيعات هي الربيع الأول (الربيع الأدنى)،

الربيع الثاني (الربيع الأوسط) وهو الوسيط، الربيع الثالث (الربيع الأعلى) وسنرمز للربيعات بالرمز ($ر_ك$) حيث ك =١، ٢، ٣ وبناءاً على التعريف يتضح ما يلي:

الربيع الأول ($ر_١$): هو القيمة التي يسبقها $\left(\frac{١}{٤}\right)$ البيانات ويليها $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ البيانات

وبالتالي $ر_١$ = المئين الخامس والعشرون = $م_{٢٥}$.

وعليه الربيع الثاني ($ر_٢$) = المئين الخمسون = الوسيط.

الربيع الثالث ($ر_٣$) = المئين الخامس والسبعون .

أما طريقة حسابها فيتم بنفس طرق حساب المئينات.

مثال (٦): بالاستعانة بالجدول الوارد في المثال الرابع احسب الربيع الأعلى.

الحل: الربيع الأعلى $ر_٣ = م_{٧٥}$

رتبة $ر_٣$ = رتبة $م_{٧٥} = \frac{٧٥}{١٠٠} \times ٢٥ = ١٨٫٧٥$

الآن : بعمل النسبة والتناسب.

$$\begin{array}{cccccc} & & ١٧ & \leftarrow & ٤٩٫٥ & \\ ٨ & ١٫٧٥ & ١٨٫٧٥ & \leftarrow & ر_٣=م_{٧٥} & ١٠ \\ & & ٢٥ & \leftarrow & ٥٩٫٥ & \end{array}$$

$$ر_٣ = م_{٧٥} = ٤٩٫٥ + \left(\frac{١٫٧٥}{٨}\right) \times ١٠ = ٤٩٫٥ + ٢٫١٨٧٥ = ٥١٫٦٨٧٥$$

(٣-٦-٣) العشيرات (Deciles):

العشير هو المقياس الذي يقسم المساحة تحت المضلع التكراري إلى عشرة أجزاء متساوية فالعشيرات هي: العشير الأول، العشير الثاني، العشير الثالث، ....، العشير التاسع وسنرمز للعشير رقم ك بالرمز ($ش_ك$).

وعندئذ فإن : $ش_١$ = العشير الأول = المئين العاشر = $م_{١٠}$

$ش_٢$ = العشير الثاني = المئين العشرون = $م_{٢٠}$

$\vdots$

$ش_٩$ = العشير التاسع = المئين التسعون = $م_{٩٠}$

ويتم حسابها بنفس الطرق التي تم بها حساب المئينات.

مثال (٧): بالاستعانة بالجدول الوارد في المثال الرابع أحسب العشير الثالث والخامس.

الحل: (١) العشير الثالث = $م_{٣٠}$

رتبة $ش_{٣}$ = رتبة $م_{٣٠}$ = $\frac{٣٠}{١٠٠} \times ٢٥ = ٧,٥$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & ٢٩,٥ & \leftarrow & ٨ & \\ ١٠ & ش_{٣}=م_{٣٠} & \leftarrow & ٧,٥ & ٢,٥ \quad ٥ \\ & ٣٩,٥ & \leftarrow & ١٠ & \end{array}$$

❖ $ش_{٣} = م_{٣٠} = ٢٩,٥ + \left(\frac{٢,٥}{٥}\right) \times ١٠ = ٢٩,٥ + ٥ = ٣٤,٥$

٢- العشير الخامس = $م_{٥٠}$ = ٤٥,٠٥ [كما في الحل الموجود في المثال ٤] .

أثر التحويلات الخطية على المئينات:

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات (الأولية أو في جدول) وأجرينا عليها التعديل التالي: ص = أ س +ب.

حيث أ ، ب أعداد حقيقة، ص : المشاهدة قبل التعديل، ص: المشاهدة بعد التعديل فإن:

١- المئين رقم ك بعد التعديل = أ × المئين رقم ك قبل التعديل + ب

$م_{ك}$ (ص) = أ × $م_{ك}$ (س) + ب شريطة أ موجبة.

٢- إذا كانت أ سالبة فإن:

م ك (ص) = أ × $م_{(١٠٠-ك)}$ (س) +ب

مثال (٨): إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان $م_{١٠}$= ١٥ وأجرينا التعديل التالي:

ص = ٠,٦ س + ٧.

احسب المئين العاشر بعد التعديل.

الحل: المئين العاشر بعد التعديل = ٠,٦ × المئين العاشر قبل التعديل + ٧

= ٠,٦× ١٥+ ٧ = ٩+ ٧=١٦.

مثال (٩): إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان $م_{٢٠}$ = ١٠ ، $م_{٨٠}$ = ٤٠ وأجرينا التعديل التالي : ص = −٠,٧ س + ١٢

أحسب المئين العشرون بعد التعديل.

الحل: م ٢٠ بعد التعديل = −٠,٧ × $م_{(١٠٠-٢٠)}$ + ١٢

= −٠,٧ × $م_{٨٠}$ + ١٢

= −٠,٧ × ٤٠ + ١٢

= −٢٨ + ١٢ = −١٦

(٣-٧) الرتب المئينية:

الرتب المئينية لمشاهدة ما : هي النسبة المئوية للتكرارات التي تقل عن هذه المشاهدة بالنسبة إلى مجموع التكرارات الكلي.

أي أن : الرتبة المئينية لمشاهدة ما = $\frac{\text{التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة}}{\text{مجموع التكرارات الكلي}}$ × ١٠٠٪

ولتوضيح كيفية حسابها نورد المثال التالي:

مثال (١٠): إليك الجدول التالي:

الفئات	٢٤−٢٠	٢٩−٢٥	٣٤−٣٠	٣٩−٣٥	المجموع
التكرار	٧	٣	٦	٤	٢٠

أوجد:

(١) الرتبة المئينية للمشاهدة (٢١).

(٢) الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٠).

(٣) الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٤,٥).

الحل:

بتكوين الجدول التراكمي الصاعد :

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تصاعدي تراكمي
١٥-١٩	صفر	١٩,٥	صفر
٢٠-٢٤	٧	٢٤,٥	٧
٢٥-٢٩	٣	٢٩,٥	١٠
٣٠-٣٤	٦	٣٤,٥	١٦
٣٥-٣٩	٤	٣٩,٥	٢٠
المجموع	٢٠		

(١) المطلوب إيجاد الرتبة المئينية للمشاهدة (٢١) والبحث عن هذه المشاهدة ضمن الحدود الفعلية نجدها تقع بين الحدين الفعليين ١٩,٥ ، ٢٤,٥ . فنجري النسبة والتناسب على النحو التالي:

٥	١٩,٥	←	صفر	٧
١,٥	٢١	←	س	
	٢٤,٥	←	٧	

∴ س = صفر + $\left(\frac{١,٥}{٥}\right)$ × ٧ = صفر + $\frac{١٠,٥}{٥}$ = $\frac{١٠,٥}{٥}$ = ٢,١

وهذا هو التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة.

⇐ الرتبة المئينية للمشاهدة (٢١) = $\frac{\text{س}}{\text{مجموع التكرارات}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٢,١}{٢٠}$ × ١٠٠٪ = ١٠,٥٪

(٢) الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٠) :

٥	٢٩,٥	←	١٠	٦
٠,٥	٣٠	←	س	
	٣٤,٥	←	١٦	

∴ س = ١٠ + $(\frac{٠,٥}{٥})$ × ٦ = ١٠ + ٠,٦ = ١٠,٦ = التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة

⇐ الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٠) = $\frac{س}{٢٠}$ × ١٠٠٪ = = $\frac{١٠,٦}{٢٠}$ × ١٠٠٪ = ٥٣٪

٣- الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٤,٥) وبالبحث عن هذه المشاهدة ضمن الحدود الفعلية نجدها موجود وتقابل تكرار تراكمي مقداره (١٦) وبتطبيق قانون الرتبة المئينية نجد:

$$\text{الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٤,٥)} = \frac{\text{التكرار التراكمي المقابل للمشاهدة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٦}{٢٠} \times ١٠٠\% = ٨٠\ \%$$

ملاحظات:

١- نلاحظ بأن المئين هو قيمة على المحور الأفقي والرتبة هي نسبة مئوية.

٢- في حالة المئين فإننا نعطي نسبة مئوية (وهي رقم المئين). فنحاول إيجاد قيمة على المحور الأفقي (محور القيم) بحيث تكون هذه النسبة مساوية لنسبة عدد البيانات الأقل من هذه القيم إلى عدد البيانات الكلي.

٣- الرتبة المئينية: فإننا نعطي مشاهدة ما فنحاول إيجاد النسبة المئوية لتكرارات القيم التي تقل عن هذه المشاهدة.

مسائل محلولة:

مسألة (١): كانت علامات (٩) طلاب في امتحان قصير نهايته العظمى (١٥) كـالآتي:

١٢، ١١، ١٣، ٩، ٨، ٦، ٥، ٣، ١٤.

أوجد: (١) الوسط الحسابي. (٢) الوسيط. (٣) المئين الثلاثون.

الحل: ١- $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٢+١١+١٣+٩+٨+٦+٥+٣+١٤}{٩} = \frac{٨١}{٩} = ٩$

٢- سنكون جدول يبين المشاهدة وترتيبها كالآتي:

العلامة	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٣	١٤
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

بما أن عدد المشاهدات فردي فإن رتبة الوسيط = $\frac{ن+١}{٢} = \frac{٩+١}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

وبالتالي فالوسيط = القيمة المقابلة للرتبة ٥ ويساوي (٩) .

٣- بالاستفادة من الجدول الوارد في (٢)

رتبة المئين الثلاثون = $\frac{٣٠}{١٠٠} \times (٩+١) = ٣$

$\therefore$ $م_{٣٠}$ = ٦

مسألة (٢): الجدول التالي يبين المعدلات الفصلية لإحدى الطالبات في إحدى الكليات التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية.

الفصل الدراسي	الأول ١٩٩٩/ ٢٠٠٠	الثاني ٢٠٠٠/٩٩	الصيفي ٢٠٠٠	الأول ٢٠٠١/٢٠٠	الثاني ٢٠٠١/٢٠٠٠
المعدل	٥٩	٦٧	٦٥	٦٨	٧٠
عدد الساعات المعتمدة	١٥	١٨	٩	١٨	١٢

احسب معدلها التراكمي.

الحل:

$$\text{المعدل التراكمي} = \frac{\text{مجموع حواصل ضرب المعدلات الفصلية بالساعات المعتمدة}}{\text{مجموع الساعات المعتمدة}}$$

$$= \frac{١٥\times٥٩+١٨\times٦٧+٩\times٦٥+١٨\times٦٨+١٢\times٧٠}{١٥+١٨+٩+١٨+١٢}$$

$$= \frac{٨٨٥+١٢٠٦+٥٨٥+١٢٢٤+٨٤٠}{٧٢} = \frac{٤٧٤٠}{٧٢} = ٦٥{,}٨٣$$

مسألة (٣): إذا كانت علامات إحدى الطلبة في كلية الهندسية هي: ٨٥، ٧٤، ٨٣، ٨٦، ٩١، س علماً بأن الساعات المعتمدة لهذه المساقات هي على الترتيب ٣، ٢، ٤، ٦، ٢، ٣ والمعدل الفصلي لها يساوي (٨٥) أوجد قيمة س.

الحل: المعدل الفصلي = ٨٥ = $\frac{٨٥\times٣+٧٤\times٢+٨٣\times٤+٨٦\times٦+٩١\times٢+\text{س}\times٣}{٣+٢+٤+٦+٢+٣}$

$\Leftarrow$ ٨٥ × ٢٠ = ٢٥٥ + ١٤٨ + ٣٣٢ + ٥١٦ + ١٨٢ + ٣ س

$\therefore$ ٣ س = ١٧٠٠ − ١٤٣٣ = ٢٦٧

$\therefore$ س = $\frac{٢٦٧}{٣} = ٨٩$

مسألة (٤): إذا كان $\sum$ (س$_\text{ر}$ − ٣٥) = ٤٠، ن = ٢٠ إذا علمت بأن الوسط الفرضي = ٣٥ أوجد $\overline{\text{س}}$.

الحل: لتكن ح$_\text{ر}$ = س$_\text{ر}$ − ٣٥ فإن $\overline{\text{س}} = \text{ف} + \frac{\sum \text{ح}_\text{ر}}{\text{ن}}$

$\therefore$ $\overline{\text{س}} = ٣٥ + \frac{٤٠}{٢٠} = ٣٥ + ٢ = ٣٧$

مسألة (٥): إذا كان $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ (س$_\text{ر}$ + ص$_\text{ر}$) = ٣٣٠ وكان $\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} = ١٥$ أوجد $\overline{\text{ص}}$ علماً بأن $\sum$ س$_\text{ر}$ = ٢٠٠.

الحل: $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ (س$_\text{ر}$ + ص$_\text{ر}$) = ن ($\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}}$)

٣٣٠ = ن × ١٥ $\Leftarrow$ ن = ٢٢

$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ س$_\text{ر}$ + $\sum_{\text{ر}=١}$ ص$_\text{ر}$ = ٣٣٠

٢٠٠ + $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ ص$_\text{ر}$ = ٣٣٠ $\Leftarrow$ $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ ص$_\text{ر}$ = ١٣٠

$\therefore$ $\overline{\text{ص}} = \frac{١٣٠}{٢٢} = ٥{,}٩$

تمارين الوحدة الثالثة

س١: لديك البيانات ٩، ١٠، ٧، ٦، ٨، ٩، ٧، ٢، ٥ أحسب ما يلي:

(أ) الوسط الحسابي. (ب) الوسيط.

(جـ) المنوال. (د) المئين الخامس والعشرون.

(هـ) المئين الخمسون. (و) الربيع الأدنى.

(ز) الربيع الأعلى. (حـ) العشير السادس.

س٢: لديك القيم –١٧، –٣٤، ٥٠، ٦٤، ١٥، ٩، ٣، ١٢ احسب ما يلي:

(أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط (جـ) المنوال

س٣: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للأجور الأسبوعية لـ ٥٠٠ عامل في مصنع.

الفئات	١-١٠	١١-٢٠	٢١-٣٠	٣١-٤٠	٤١-٥٠	٥١-٦٠	٦١-٧٠	٧١-٨٠	٨١-٩٠
التكرار	١٠	٢٠	١٠٠	١٨٠	١٢٠	٥٠	١٥	٣	٢

أحسب ما يلي:

(١) الوسط الحسابي للأج (٢) الوسيط (٣) المنوال بطريقة بيرسون

(٤) المنوال بطريقة الرافعة (٥) المنوال بيانياً (٦) الربيع الأول والثالث

(٧) المئين التسعون (٨) المنوال التقريبي

س٤: الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري قيمة المبيعات في معرض الساعات المباعة خلال أسبوع بالدينار الأردني.

قيمة المبيعات (الفئات)	٦,٥-٧,٥	٧,٦-٨,٦	٨,٧-٩,٧	٩,٨-١٠,٨	١٠,٩-١١,٩
عدد الساعات	١٣	١٢	١٥	١٠	١٠

أحسب ما يلي:

(١) الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (٢) الوسيط بطريقة القانون.

(٣) المئين السبعون. (٤) المئين الثاني والستون بيانياً.

(٥) المنوال بيانياً. (٦) الرتبة المئينية للمشاهدة(٩)

(٧) الرتبة المئينية للمشاهدة (١٠,٨٥) (٨) الربيع الأدنى

س٥: ثلاثة من مدرس الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم ٨٢، ٧٤، ٧٩ في شعبهم المكونة من ١٧، ٢٥، ٣٢ طالباً على الترتيب أوجد متوسط الدرجات في جميع الفصول.

س٦: أخذت عينتان من مجتمعين فأعطتا النتائج التالية:

$\sum_{ر=1}^{30}$ س ر = ٣٠٠ ، $\sum_{ر=1}^{40}$ ص ر = ٢٠٠ احسب.

(١) الوسط الحسابي لكل عينة.

(٢) دمجت العينتين أوجد الوسط الحسابي للمجموعة الناتجة.

س٧: إذا كان الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمئين الستون لمجموعة من العلامات هي على الترتيب ٣٥، ٤٢، ٤٧، ٤٥ وأجرينا التعديل التالي: ص = $\frac{١}{٦}$س + ١١ حيث س: العلامة قبل التعديل وص: العلامة بعد التعديل أوجد الوسط والوسيط والمنوال والمئين الستون بعد التعديل.

س٨: مجموعة من البيانات فيها : $\bar{س}$ = ٥٠ ، ن = ٢٠ . أوجد مجموع البيانات .

س٩: إذا كان انحرافات ستة قيم عن وسطها الحسابي هي أ ، ٢أ ، ٣أ ، ٤أ، ٥أ ، -١٥ أوجد قيمة أ .

س١٠: لمجموعة من البيانات اختير العدد (١٥) كوسط فرضي، إذا علمت بأن مجموع انحرافات هذه البيانات عن الوسط الفرضي يساوي (٢٠٠) وكان عدد البيانات يساوي (٢٠) أوجد الوسط الحسابي.

س١١: إذا كانت الأوساط الحسابية لعلامات مادة الإحصاء التربوي ثلاث شعب هي ٥٠، ٤٠، س وكانت أعداد الشعب على التوالي ٢٠، ٤٠، ٣٠ أحسب قيمة س إذا علمت بأن قيمة الوسط المرجح لهذه الشعب (٤٥).

س١٢: إذا كان الوسط الحسابي لشعبة عدد طلابها (٣٠) يساوي (٦٠) وكان المتوسط الحسابي لأول (٥) طلاب يساوي (٧٠) أوجد الوسط الحسابي لباقي طلبة الشعبة.

س١٣: الجدول التالي يعطي المعدلات الفصلية لإحدى طالبات في كلية مجتمع.

الفصل الدراسي	المعدل الفصلي	عدد الساعات	الفصل الدراسي	المعدل الفصلي	عدد الساعات
الأول ٩٥/٩٦	٧٥	١٣	الأول ٩٦/٩٧	٧٨,٥	١٨
الثاني ٩٥/٩٦	٧٦	١٧	الثاني ٩٦/٩٧	٧٧	١٥

أحسب المعدل التراكمي لهذه الطالبة.

س١٤: الجدول التالي يبين أوزان (٥٠) شخص.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠	٨٥
عدد الأشخاص	٣	٢	١٠	١١	١٤	٦	٤

أحسب ما يلي:

(١) الوسط الحسابي (٢) الوسيط (٣) المنوال (٤) المئين الستون

٤

الوحدة الرابعة

مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتفرطح

Measures of Dispersion, Moments, Skewness & Kurtosis

(٤-١) المدى.

(٤-٢) نصف المدى الربيعي.

(٤-٣) الانحراف المتوسط.

(٤-٤) الانحراف المعياري.

(٤-٥) التباين.

(٤-٦) أثر التحويلات الخطية على مقاييس التشتت.

(٤-٧) صفات مقاييس التشتت

(٤-٨) مقايسس التشتت النسبية

(٤-٨-١) معامل التغير.

(٤-٨-٢) القيمة المعيارية

(٤-٩) العزوم.

(٤-١٠) مقاييس الإلتواء.

(٤-١١) مقاييس التفرطح.

(٤-١٢) مسائل محلولة.

- تمارين الوحدة

مقاييس التشتت والعزوم والالتواء والتفرطح

Measures of Dispersion, Moments, Skewness & Kurtosis

مفهوم التشتت: التشتت أو التركز من أهم خصائص البيانات فإذا كان البيانات متجانسة ومتشابهة وغير متباعدة عن بعضها أي مركزة حول بعضها وبالتالي حول وسطها الحسابي، أما إذا كانت مجموعة البيانات متباعدة ومتباينة عن بعضها وغير متجانسة فيقال أنها بيانات متشتتة. وللتشتت أهمية لأنه ربما تتساوى المتوسطات لأكثر من مجموعة ولكن هذه المجموعات مختلفة كثيراً من حيث التجانس، فنقع بالخطأ عندما نقول بأنها متشابهة.

تعريف مقياس التشتت: هو المقياس الذي يستعمل كمؤشر إحصائي لتحديد درجة التركيز أو التشتت.

ملاحظة: يجب معرفة بأن درجة التشتت أما إن تكون معدومة (=صفر) أو ضعيفة أو كبيرة ويجب المعرفة بأن مقياس التشتت لا يمكن أن يكون سالباً (لأنها مقاييس تباعد (مسافة).

ومن أهم مقاييس التشتت:

أ - المدى.　　　ب- نصف المدى الربيعي.

جـ- الانحراف المتوسط　　　د - الانحراف المعياري　　　هـ - التباين.

(٤-١) المـدى:

يعرف المدى بأنه الفرق بين أكبر مشاهدة وأقل مشاهدة.

أ) في حالة المفردات: يعرف المدى في حالة المفردات على النحو التالي:

المدى = أكبر قيمة - أقل قيمة.

مثال (١): أوجد المدى للمشاهدات التالية: -١٧، ١٤، ٣، ٥، -٦، ٣، ٠ .

الحل: المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٤-(-١٧) = ١٤+ ١٧= ٣١

ب- في حالة الجداول التكرارية:

المدى = الحد الأعلى الفعلي للفئة الأخيرة - الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى.

مثال (٢): إذا كانت الفئة الأولى في جدول تكراري هي (٣٠-٣٩) والفئة الأخيرة في الجدول هي (٧٠-٧٩) أوجد مدى الجدول.

الحل: المدى = الحد الأعلى الفعلي للفئة الأخيرة - الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى

= ٧٩,٥ - ٢٩,٥ = ٥٠

(٢-٤) نصف المدى الربيعي:

يعرَّف نصف المدى الربيعي بأنه الفرق بين الربيع الأعلى والأدنى مقسوماً على ٢ .

نصف المدى الربيعي = $\text{ر} = \dfrac{\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{١}}{٢} = \dfrac{\text{م}_{٧٥} - \text{م}_{٢٥}}{٢}$ .... (١)

مثال (٣): إذا كان الربيع الأعلى لمجموعة من البيانات = ١٢ والربيع الأدنى يساوي (٨) أوجد نصف المدى الربيعي.

الحل: نصف المدى الربيعي = $\text{ر} = \dfrac{\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{١}}{٢} = \dfrac{١٢ - ٨}{٢} = \dfrac{٤}{٢} = ٢$

مثال (٤): الجدول التالي يبين علامات شعبة ما في أحد المساقات الدراسية.

الفئات	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	المجموع
التكرار	٣	٧	٦	٤	٢٠

أوجد نصف المدى الربيعي.

الحل: يكون الجدول التراكمي الصاعد.

الفئات	ت	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
١٥-١٩	صفر	١٩,٥	صفر
٢٠-٢٤	٣	٢٤,٥	٣
٢٥-٢٩	٧	٢٩,٥	١٠
٣٠-٣٤	٦	٣٤,٥	١٦
٣٥-٣٩	٤	٣٩,٥	٢٠
المجموع	٢٠		

١- رتبة م$_{٧٥}$ $= \frac{٧٥}{١٠٠} \times ٢٠ = ١٥$

$$\begin{array}{cccc} & ٢٩٫٥ & \leftarrow & ١٠ \\ ٥ & م_{٧٥} & \leftarrow & ١٥ & ٥ & ٦ \\ & ٣٤٫٥ & \leftarrow & ١٦ \end{array}$$

❖ م$_{٧٥}$ $= ٢٩٫٥ + \frac{٥}{٦} \times ٥$

$$= ٢٩٫٥ + \frac{٢٥}{٦} = ٢٩٫٥ + ٤٫١٦ = ٣٣٫٦٦$$

٢- رتبة م$_{٢٥}$ $= \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٢٠ = ٥$

$$\begin{array}{cccc} & ٢٤٫٥ & \leftarrow & ٣ \\ ٥ & م_{٢٥} & \leftarrow & ٥ & ٢ & ٧ \\ & ٢٩٫٥ & \leftarrow & ١٠ \end{array}$$

❖ م$_{٢٥}$ $= ٢٤٫٥ + \frac{٢}{٧} \times ٥ = ٢٤٫٥ + \frac{١٠}{٧}$

$= ٢٤٫٥$س $+ ١٫٤٢ = ٢٥٫٩٢$

❖ نصف المدى الربيعي $= \frac{م_{٧٥} - م_{٢٥}}{٢} = \frac{٣٣٫٦٦ - ٢٥٫٩٢}{٢} = \frac{٧٫٧٤}{٢} = ٣٫٨٧$

(٤-٣) الانحراف المتوسط (The Mean Deviation):

هو مجموع القيم المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عددها.

تعريف: تعرف القيمة المطلقة للعدد س على النحو التالي:

$$|س| = \begin{cases} س \text{ ، } س \geq \text{صفر} \\ -س \text{ ، } س < \text{صفر} \end{cases}$$

وبالتالي فإن $|٤| = ٤$ ، $|-٣| = ٣$ ، $|-٦٫٥| = ٦٫٥$

أي أن القيم المطلقة للعدد هو تجريده من الإشارة السالبة وجعل إشارته موجبة.

أ - في حالة المفردات: ليكن لدينا المشاهدات $س_1$، $س_2$، .... $س_ن$ وسطها الحسابي ($\overline{س}$) فإن الانحراف المتوسط (ح.م) يعرف على النحو التالي:

$$\text{الانحراف المتوسط} = ح.م = \frac{\sum |س_ر - \overline{س}|}{ن} \quad .... \quad (٢)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد الوسط الحسابي للمشاهدات.

(٢) إيجاد انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

(٣) أخذ القيمة المطلقة للانحرافات في الخطوة (٢).

(٤) إيجاد مجموع القيم المطلقة للانحرافات في الخطوة (٣).

(٥) تطبيق المعادلة رقم (٢).

مثال (٤): أوجد الانحراف المتوسط للمشاهدات ٣، ٧، ٨، ٤، ٦، ٩، ١٠، ١ .

الحل: (١) $\overline{س} = \frac{٣+٧+٨+٤+٦+٩+١٠+١}{٨} = \frac{٤٨}{٨} = ٦$

(٢) انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $= س_ر - \overline{س}$

$= ٣-٦، ٧-٦، ٨-٦، ٤-٦، ٦-٦، ٩-٦، ١٠-٦، ١-٦$

$= -٣، ١، ٢، -٢، ٠، ٣، ٤، -٥$.

(٣) القيم المطلقة للانحرافات هي: $|-٣|$، $|١|$، $|٢|$، $|-٢|$، $|٠|$، $|٣|$، $|٤|$، $|-٥|$.

❖ $|س_ر - \overline{س}|$: ٣، ١، ٢، ٢، ٠، ٣، ٤، ٥ .

(٤) مجموع القيم المطلقة للانحرافات $= \sum |س_ر - \overline{س}| = ٣+١+٢+٢+٠+٣+٤+٥$

(٥) باستعمال المعادلة (٢): $ح.م = \frac{\sum |س - \overline{س}|}{ن} = \frac{٢٠}{٨} = ٢,٥$

ب) في حالة الجداول التكرارية: ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته $س_1$، $س_2$، ....، $س_م$ والتكرارات المقابلة هي $ت_1$، $ت_2$، ....، $ت_م$ فإن الانحراف المتوسط (ح.م) يعرف على النحو التالي:

$$ح.م = \frac{\sum |س_ر - \overline{س}| \times ت_ر}{\sum ت_ر} \quad .... \quad (٣)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد مراكز الفئات.

(٢) إيجاد الوسط الحسابي.

(٣) إيجاد انحرافات مراكز الفئات من الوسط الحسابي.

(٤) أخذ القيم المطلقة للانحرافات في الخطوة (٣).

(٥) ضرب القيم المطلقة للانحرافات بالتكرارات المقابلة.

(٦) تطبيق المعادلة (٣).

مثال (٥): أوجد الانحرافات المتوسط للجدول التالي:

الفئات	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	المجموع
التكرار	٣	٧	٤	٦	٢٠

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفئات	ت ر	مركز الفئة س ر	س ر×ت ر	س ر − $\overline{س}$	|س ر − $\overline{س}$|	|س ر − $\overline{س}$|×ت ر
٢٠-٢٤	٣	٢٢	٦٦	٢٢−٣٠,٢٥=−٨,٢٥	|−٨,٢٥|=٨,٢٥	٨,٢٥×٣=٢٤,٧٥
٢٥-٢٩	٧	٢٧	١٨٩	٢٧−٣٠,٢٥=−٣,٢٥	|−٣,٢٥|=٣,٢٥	٣,٢٥×٧=٢٢,٧٥
٣٠-٣٤	٤	٣٢	١٢٨	٣٢−٣٠,٢٥=١,٧٥	|١,٧٥|=١,٧٥	١,٧٥×٤=٧
٣٥-٣٩	٦	٣٧	٢٢٢	٣٧−٣٠,٢٥=٦,٧٥	|٦,٧٥|=٦,٧٥	٦,٧٥×٦=٤٠,٥٠
المجموع	٢٠		٦٠٥			٩٥

الوسط الحسابي: $\overline{س} = \frac{٦٠٥}{٢٠} = ٣٠,٢٥$

$$ح.م = \frac{\sum |س_ر - \overline{س}| \times ت_ر}{\sum ت} = \frac{٩٥}{٢٠} = ٤,٧٥$$

(٤-٤) الانحراف المعياري (Standard Deviation):

(أ) في حالة المشاهدات المفردة: هنالك ثلاث طرق لحسابه:

الطريقة الأولى: (الطريقة العامة): ليكن لدينا المشاهدات $س_١$، ....، $س_ن$ وسطها الحسابي ($\overline{س}$) فإن الانحراف المعياري (σ) يعرف على النحو التالي:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(س_ر - \overline{س})^2}{ن}} \quad .... \quad (٤)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد الوسط الحسابي للمشاهدات.

(٢) إيجاد انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي.

(٣) إيجاد مربعات انحرافات المشاهدات التي وجدناها في الخطوة (٢).

(٤) إيجاد مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن وسطها الحسابي.

(٥) تطبيق المعادلة رقم (٤).

مثال (٦): أوجد الانحراف المعياري للمشاهدات ١، ٢، ٣، ٤، ٥ .

الحل: (١) $\overline{س} = \frac{١+٢+٣+٤+٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

(٢) انحرافات المشاهدات عن وسطها الحسابي : $(س_ر - \overline{س})$ هي:

١-٣، ٢-٣، ٣-٣، ٤ -٣، ٥ -٣= -٢، -١، ٠، ١، ٢

(٣) مربعات انحرافات المشاهدات عن وسطها الحسابي = $(س_ر - \overline{س})^2$ هي:

$(-٢)^2$، $(-١)^2$، $(٠)^2$، $(١)^2$، $(٢)^2$ = ٤، ١، ٠، ١، ٤

(٤) مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن وسطها الحسابي = $\sum(س_ر - \overline{س})^2$

= ٤+ ١+ ٠ + ١+ ٤ = ١٠

(٥) بتطبيق المعادلة رقم (٤) ينتج : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(س_ر - \overline{س})^2}{ن}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢}$

الطريقة الثانية: يعرف الانحراف المعياري على النحو التالي:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma\sigma = \sqrt{\frac{\sum س_ر^2}{ن} - \overline{س}^2} \quad .... \quad (٥)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد الوسط الحسابي $(\overline{س})$.

(٢) إيجاد مربع القيم $(س_ر^2)$.

(٣) إيجاد مجمع مربع القيم $\sum (س_ر^2)$.

(٤) تطبيق الصيغة رقم (٥).

مثال (٧): أوجد الانحراف المعياري للمشاهدات الواردة في المثال (٦).

الحل: (١) $\bar{س} = ٣$.

(٢) مربع القيم = $س_ر^٢$ = $(١)^٢$، $(٢)^٢$ ، $(٣)^٢$ ، $(٤)^٢$ ، $(٥)^٢$

= ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥.

(٣) مجموع مربع القيم $\sum س_ر^٢$ = ١+ ٤+٩ + ١٦+ ٢٥ =٥٥

(٤) بتطبيق الصيغة (٥). $\sigma = \sqrt{\frac{\sum س_ر^٢}{ن} - \bar{س}^٢} = \sqrt{\frac{٥٥}{٥} - (٣)^٢} = \sqrt{١١-٩} = \sqrt{٢}$

الطريقة الثالثة: [طريقة الوسط الفرضي]:

الانحراف المعياري= $\sigma = \sqrt{\frac{\sum ح_ر^٢}{ن} - \left(\frac{\sum ح_ر}{ن}\right)^٢}$ .... (٦)

حيث $ح_ر$: انحراف القيمة عن الوسط الفرضي.

خطوات حسابه:

(١) اختيار الوسط الفرضي (ف).

(٢) إيجاد انحرافات القيم عن الوسط الفرضي ($ح_ر$).

(٣) إيجاد مربع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي = ($ح_ر^٢$).

(٤) إيجاد مجموع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي ($\sum ح_ر$) .

(٥) إيجاد مجموع مربع انحرافات القيم عن الوسط الفرضي ($\sum ح_ر^٢$)

(٦) تطبيق الصيغة (٦).

مثال (٨): أوجد الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي للمشاهدات -٣، ٣، ١، ٤، ٤

الحل: (١) نختار الوسط الفرضي ف = ١

(٢) بتكوين جدول الحل على النحو التالي:

القيمة $س_ر$	$ح_ر = س_ر - ف$	$ح_ر^٢$
-٣	-٣-١= -٤	١٦
٣	٣-١=٢	٤
١	١-١=٠	٠
٤	٤-١=٣	٩
٤	٤-١=٣	٩
المجموع	٤	٣٨

الآن بتطبيق الصيغة رقم (٦).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum ح_ر^{٢}}{ن} - \left(\frac{ح_ر}{ن}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{٣٨}{٥} - \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}} = \sqrt{٧,٦ - ٠,٦٤} = \sqrt{٦,٩٦}$$

ب- في حالة التوزيعات التكرارية:

هنالك ثلاثة طرق لحسابه هي:

الطريقة الأولى: [الطريقة العامة] ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته هـي $س_١$، $س_٢$ ، ..... ، $س_م$ والتكرارات المقابلة هي $ت_١$، ... $ت_م$ فإن:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum (س_ر - \overline{س})^{٢} \times ت_ر}{\sum ت_ر}} \quad .... \quad (٧)$$

خطوات حسابه:

(١) إيجاد مراكز الفئات. (٢) إيجاد الوسط الحسابي.

(٣) إيجاد انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي.

(٤) إيجاد مربعات انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي.

(٥) ضرب مربعات الانحرافات في الخطوة الرابعة بالتكرارات المقابلة.

(٦) تطبيق الصيغة رقم (٧).

مثال (٩): أوجد الانحراف المعياري للجدول التالي:

الفئات	٥-٩	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	المجموع
التكرار	٤٠	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠٠

الحل: بتكوين جدول الحل على النحو التالي:

الفئات	$ت_ر$	مراكز الفئة $س_ر$	$س_ر \times ت_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^{٢}$	$(س_ر - \overline{س})^2 \times ت_ر$
٥-٩	٤٠	٧	٢٨٠	٧-١٥=-٨	$(-٨)^{٢}$=٦٤	٦٤×٤٠=٢٥٦٠
١٠-١٤	١٠	١٢	١٢٠	١٢-١٥=-٣	$(-٣)^{٢}$=٩	٩×١٠=٩٠
15-19	٢٠	١٧	٣٤٠	١٧-١٥=٢	$(٢)^{٢}$=٤	٤×٢٠=٨٠
٢٠-٢٤	١٠	٢٢	٢٢٠	٢٢-١٥=٧	$(٧)^{٢}$ = ٤٩	٤٩× ١٠=٤٩٠
٢٥-٢٩	٢٠	٢٧	٥٤٠	٢٧-١٥=١٢	$(١٢)^{٢}$=١٤٤	١٤٤×٢٠=٢٨٨٠
المجموع	١٠٠		١٥٠٠			٦١٠٠

الوسط الحسابي = $\bar{س} = \frac{١٥٠٠}{١٠٠} = ١٥$

الآن بتطبيق الصيغة رقم (٧):

الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س_ر - \bar{س})^٢ \times ت_ر}{\sum ت_ر}} = \sqrt{\frac{٦١٠٠}{١٠٠}} = \sqrt{٦١} = ٧,٨١$

الطريقة الثانية: ليكن جدول تكراري مراكز فئاته $س_١$، ....، $س_م$ والتكرارات المقابلة هي ت ، .... ، $ت_م$ فإن:

الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum س_ر^٢ \times ت_ر}{\sum ت_ر} - \bar{س}^٢}$ .... (٨)

خطوات حسابه:

(١) إيجاد مراكز الفئات. (٢) إيجاد الوسط الحسابي.

(٣) إيجاد مربع مراكز الفئات. (٤) ضرب مربع مراكز الفئات بالتكرارات المقابلة.

(٥) تطبيق الصيغة رقم (٨).

مثال (١٠): للجدول التالي احسب الانحراف المعياري.

الفئات	١٠-١٢	١٣-١٥	١٦-١٨	١٩-٢١	المجموع
التكرار	٥	١٠	١٠	٥	٣٠

الحل: بتكوين جدول الحل :

الفئات	$ت_ر$	$س_ر$	$س_ر \times ت_ر$	$س_ر^٢$	$س_ر^٢ \times ت_ر$
١٠-١٢	٥	١١	٥٥	$(١١)^٢=١٢١$	١٢١×٥=٦٠٥
١٣-١٥	١٠	١٤	١٤٠	$(١٤)^٢ = ١٩٦$	١٩٦×١٠=١٩٦٠
١٦-١٨	١٠	١٧	١٧٠	$(١٧)^٢=٢٨٩$	٢٨٩×١٠=٢٨٩٠
١٩-٢١	٥	٢٠	١٠٠	$(٢٠)^٢ = ٤٠٠$	٤٠×٥=٢٠٠٠
المجموع	٣٠		٣٦٥		٧٤٥٥

$\bar{س} = \frac{٣٦٥}{٣٠} = ١٢,١٦$

الآن بتطبيق الصيغة (٨) : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \text{س}_{\text{ر}}^{2} \times \text{ت}_{\text{ر}}}{\text{ت}_{\text{ر}}} - \bar{\text{س}}^{2}}$

$= \sqrt{\frac{\text{٧٤٥٥}}{\text{٣٠}} - (\text{١٢,١٦})^{2}} = \sqrt{\text{٢٤٨,٥} - \text{١٤٧,٨٧}} = \sqrt{\text{١٠٠,٦٣}} = \text{١٠,٠٣١}$.

الطريقة الثالثة: [طريقة الوسط الفرضي]:

الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{\frac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}^{2} \times \text{ت}_{\text{ر}}}{\sum \text{ت}_{\text{ر}}} - \left(\frac{\sum \text{ح}_{\text{ر}} \times \text{ت}_{\text{ر}}}{\sum \text{ت}_{\text{ر}}}\right)^{2}}$ .... (٩)

خطوات حسابه:

(١) اختيار وسط فرضي ف.
(٢) إيجاد انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ($\text{ح}_{\text{ر}}$).
(٣) إيجاد حاصل ضرب الانحرافات في الخطوة (٢) بالتكرار المقابل.
(٤) إيجاد مجموع حواصل الضرب للانحرافات بتكراراتها المقابلة.
(٥) إيجاد مربع الانحرافات في الخطوة (٢)
(٦) إيجاد حاصل ضرب مربع الانحرافات بالتكرارات المقابلة.
(٧) إيجاد مجموع حواصل الضرب في الخطوة السادسة.
(٨) تطبيق الصيغة رقم (٩).

مثال (١١): للجدول التالي احسب الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.

الفئات	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	المجموع
التكرار	٧	٢	١	١٢	١٨	٤٠

الحل: بتكوين جدول الحل:

الفئات	$\text{ت}_{\text{ر}}$	مراكز الفئات $\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{ح}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} - \text{ف}$	$\text{ح}_{\text{ر}} \times \text{ت}_{\text{ر}}$	$\text{ح}_{\text{ر}}^{2}$	$\text{ح}_{\text{ر}}^{2} \times \text{ت}_{\text{ر}}$
١٠-١٤	٧	١٢	١٢-٢٧=-١٥	-١٠٥	٢٢٥	١٥٧٥
١٥-١٩	٢	١٧	١٧-٢٧=-١٠	-٢٠	١٠٠	٠٢٠٠
٢٠-٢٤	١	٢٢	٢٢-٢٧=-٥	-٥	٠٢٥	٠٠٢٥
٢٥-٢٩	١٢	٢٧ ف	٢٧-٢٧=٠	٠٠٠	٠٠٠	٠٠٠٠
٣٠-٣٤	١٨	٣٢	٣٢-٢٧=٥	٩٠	٠٢٥	٠٤٥٠
المجموع	٤٠			-٤٠		٢٢٥٠

الآن بتطبيق (٩) ينتج: $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ ح_ر^{٢} \times ت_ر}{\text{مجـ}\ ت_ر} - \left(\frac{\text{مجـ}\ ح_ر \times ت_ر}{\text{مجـ}\ ت_ر}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٢٢٥٠}{٤٠} - \left(\frac{-٤٠}{٤٠}\right)^{٢}} = \sqrt{٥٦,٢٥ - ١} = \sqrt{٥٥,٢٥} = ٧,٤٣٣$

(٤-٥) التباين: (The Variance):

هو مربع الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز ($\sigma^{٢}$).

طريقة حسابه:

(١) نستخرج الانحراف المعياري.

(٢) نقوم بتربيع الجواب في الخطوة الأولى.

مثال (١٢): استخرج التباين للمشاهدات الواردة في المثال (٦).

الحل: بما أن الانحراف المعياري (σ) $= \sqrt{٢}$

فإن التباين $= \sigma^{٢} = (\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

مثال (١٣): استخرج التباين للجدول في المثال (١١).

الحل: بما أن الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{٥٥,٢٥}$

فإن التباين $= \sigma^{٢} = (\sqrt{٥٥,٢٥})^{٢} = ٥٥,٢٥$.

(٤-٦) أثر التحويلات الخطية على مقاييس التشتت:

ليكن لدينا البيانات (الأولية أو في جدول) وعدِّلت هذه البيانات وفق المعادلة التالية:

ص = أ س + ب

حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

س : المشاهدة قبل التعديل، ص : المشاهدة بعد التعديل.

فإن:

١- المدى بعد التعديل = | أ | × المدى قبل التعديل .... (١٠)

٢- الانحراف المتوسط بعد التعديل = | أ | × الانحراف المتوسط قبل التعديل.

ح.م (ص) = | أ | × ح.م (س) .... (١١)

٣- الانحراف المعياري بعد التعديل = | أ | × الانحراف المعياري قبل التعديل.

$\sigma_{ص} = |أ| \times \sigma_{س}$ .... (١٢)

٤- التباين بعد التعديل = | أ |^{٢} × التباين قبل التعديل.

$\sigma^{٢}_{ص} = أ^{٢} \times \sigma^{٢}_{س}$ .... (١٣)

٥- نصف المدى الربيعي بعد التعديل= | أ | × نصف المدى الربيعي قبل التعديل.

$ر_{ص} = |أ| \times ر_{س}$ .... (١٤)

مثال (١٤): إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات يساوي (٣) وضربنا كل مشاهدة بـ ٢ أوجد؟

(١) الانحراف المعياري بعد الضرب.

(٢) التباين قبل الضرب.

(٣) التباين بعد الضرب ما علاقته بالتباين قبل عملية الضرب.

الحل:

١- الانحراف المعياري بعد عملية الضرب = ٢ × الانحراف المعياري قبل العملية.

= ٢ × ٣ = ٦

٢- التباين قبل الضرب = مربع الانحراف المعياري قبل الضرب = (٣)^{٢} =٩

٣- التباين بعد الضرب = مربع الانحراف المعياري بعد الضرب= (٦)^{٢} =٣٦

أو التباين بعد الضرب = (٢)^{٢} × التباين قبل الضرب = ٤ × ٩ = ٣٦

مثال (١٥): إذا كان الانحراف المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات هما على الترتيب ٤ ، ٦ وجمعنا لكل مشاهدة العدد (٣) أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري بعد عملية الجمع.

الحل: بما أن مقاييس التشتت لا تتأثر بالزيادة فإن الانحراف المتوسط والمعياري يبقيا كما هما.

مثال (١٦): إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات وكان الانحراف المتوسط لها ٥ والانحراف المعياري يساوي (٣) ونصف المدى الربيعي (٧) وأجرينا التعديل التالي.

ص = ٩ − $\frac{١}{٣}$س حيث س: المشاهدة قبل التعديل، ص: المشاهدة بعد التعديل. أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ونصف المدى الربيعي والتباين بعد التعديل.

الحل:

الانحراف المتوسط بعد التعديل = ح. م(ص) = $\left|\frac{-١}{٣}\right|$ × الانحراف المتوسط قبل التعديل

$$= \frac{١}{٣} \times ٥ = \frac{٥}{٣}$$

الانحراف المعياري بعد التعديل = $\sigma_{ص}$ = $\left|\frac{-١}{٣}\right|$ × الانحراف المعياري قبل التعديل.

$$= \left|\frac{-١}{٣}\right| \times ٣ = ١$$

نصف المدى الربيعي بعد التعديل= $\left|\frac{-١}{٣}\right|$ × نصف المدى الربيعي قبل التعديل.

$$= \frac{١}{٣} \times ٧ = \frac{٧}{٣}$$

التباين بعد التعديل = $\left|\frac{-١}{٣}\right|^{٢}$ × التباين قبل التعديل.

$$= \frac{١}{٩} \times (٣)^{٢} = \frac{١}{٩} \times ٩ = ١$$

صفات مقاييس التشتت:

١- يتأثر المدى بالقيم الشاذة ويصبح مضللاً في بعض الحالات.

٢- لا يتأثر نصف المدى الربيعي بالقيم الشاذة إلا أنه أقل دقة من المدى.

٣- الانحراف المتوسط سهل التعريف وسهل الحساب إلا انه لا يخضع للعمليات الحسابية بسهولة إذ يجب تعديل الإشارة ويجب معرفة المفردات بعينها لمعرفة الانحراف المتوسط وبالتالي لا يوجد طريقة لحساب الانحراف المتوسط للمجموعة الناتجة عن دمج مجموعتين من البيانات.

٤- يمكن تعريف الانحراف المعياري للعينة المسحوبة من المجتمع على النحو التالي للبيانات المفردة:

(أ) $ع = \sqrt{\frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^{٢}}{ن-١}}$ حيث ن: حجم العينة.

أو

(ب) $ع = \sqrt{\frac{\sum س_ر^{٢}}{ن-١} - \left(\frac{ن}{ن-١}\right)\bar{س}^{٢}}$

أو

$$(حـ)\ ع = \sqrt{\frac{\sum ح_ر^2}{ن-1} - \left(\frac{ن}{ن-1}\right)\left(\frac{\sum ح_ر}{ن}\right)^2}$$

مثال (١٧): بالرجوع إلى المثال رقم (٦) احسب الانحراف المعياري (ع):

الحل: بالاستفادة من المعلومات نجد بأن $\sum$ (س$_ر$ − $\bar{س}$)^2= ١٠، ن = ٥ وبالتالي فإن:

$$ع = \sqrt{\frac{١٠}{٤}} = \sqrt{٢,٥}$$

مثال (١٨): بالاستفادة من المثال رقم (٨) احسب الانحراف المعياري (ع).

الحل: بما إن $\sum ح_ر^2$ = ٣٨، $\sum ح_ر$ = ٤، ن = ٥

$$\therefore ع = \sqrt{\frac{ح_ر^2}{ن-1} - \left(\frac{ن}{ن-1}\right)\left(\frac{ح_ر}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{٣٨}{٤} - \left(\frac{٥}{٤}\right)\left(\frac{٤}{٥}\right)^2} = \sqrt{٩,٥ - ٠,٨} = \sqrt{٨,٧}$$

ملاحظة: إذا كان حجم العينة كبيراً (ن ≥ ٣٠) فإن قيمة الانحراف المعياري (ع) تصبح مقاربة جداً من قيمة الانحراف المعياري (σ).

(٥) إذا كان لدينا عينات أحجامها ن$_1$، ن$_2$، ... ، ن$_ك$ مسحوبة من مجتمع حجمه (م) وكانت كل عينة مستقلة عن الأخرى فيمكن تعريف التباين المشترك (المتجمع على النحو التالي):

$$ع_م^2 = \frac{(ن_1-1)ع_1^2 + ... + (ن_ك-1)ع_ك^2 + ن_1(\bar{س}_1-\mu)^2 + ... + ن_ك(\bar{س}_ك-\mu)^2}{(ن_1+ن_2+...+ن_ك)-ك}$$

حيث: $ع_ر^2$: التباين للعينة رقم (ر).

$\bar{س}_ر$: الوسط الحسابي للعينة رقم (ر).

μ : الوسط الحسابي التجميعي.

ك: عدد العينات المسحوبة.

مثال (١٩): إذا كانت لدينا العينات التالية كما في الجدول:

العينة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
ن	١٥٠	٢٠٠	٣٠٠	٢٥٠
$\overline{\text{س}}$	٤٠	٥٥	٦٠	٥٠
$\text{ع}^{٢}$	١٦	٢٥	١٠٠	٩

دمجت هذه العينات مع بعضها البعض فأوجد:

(أ) الوسط الحسابي الناتج عن الدمج (الوسط التجميعي):

$$\mu\mu = \frac{\overline{\text{س}}_{٤} \times \text{ن}_{٤} + \overline{\text{س}}_{٣} \times \text{ن}_{٣} + \overline{\text{س}}_{٢} \times \text{ن}_{٢} + \overline{\text{س}}_{١} \times \text{ن}_{١}}{\text{ن}_{٤} + \text{ن}_{٣} + \text{ن}_{٢} + \text{ن}_{١}}$$

$$\mu\mu = \frac{٥٠ \times ٢٥٠ + ٦٠ \times ٣٠٠ + ٥٥ \times ٢٠٠ + ٤٠ \times ١٥٠}{٢٥٠ + ٣٠٠ + ٢٠٠ + ١٥٠}$$

$$٥٢{,}٧٨ = \frac{٤٧٥٠٠}{٩٠٠} = \frac{١٢٥٠٠ + ١٨٠٠٠ + ١١٠٠٠ + ٦٠٠٠}{٩٠٠} =$$

(ب) التباين المشترك (ع٢): (التباين الناتج عن دمج المجموعات):

$$\frac{٢(٥٢{,}٧٨ - ٥٠) + ٢(٥٢{,}٧٨ - ٦٠) + {}^{٢}(٥٢{,}٧٨ - ٥٥) + {}^{٢}(٥٢{,}٧٨ - ٤٠) + ٩ \times (١ - ٢٥٠) + ١٠٠ \times (١ - ٣٠٠) + ٢٥ \times (١ - ٢٠٠) + ١٦ \times (١ - ١٥٠)}{٤ - (٢٥٠ + ٣٠٠ + ٢٠٠ + ١٥٠)} = \text{ع}_{\text{م}}^{2}$$

$$\frac{٧{,}٧٣ + ٥٢{,}١٣ + ٤{,}٩٣ + ١٦٣{,}٣٣ + ٢٢٤١ + ٢٩٩٠٠ + ٤٩٧٥ + ٢٣٨٤}{٨٩٦} =$$

$$٤٤{,}٣٤ = \frac{٣٩٧٢٨{,}١٢}{٨٩٦} =$$

(حـ) الانحراف المعياري الناتج عن الدمج $(\text{ع}_{\text{م}}) = \sqrt{٤٤{,}٣٤} = 6.66$

ملاحظة: مقاييس التشتت السابقة تسمى مقاييس تشتت مطلقة.

(٤-٨) مقاييس التشتت المطلقة:

مقياس التشتت النسبي: هو النسبة المئوية للتشتت المطلق ويصلح أساس لمقارنة تشتتات التوزيعات المختلفة لأنه لا يعتمد على الوحدات المستعملة.

ومن مقاييس التشتت النسبية :

(٤-٨-١) معامل التغير (معامل الاختلاف) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{معامل التغير} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{س}} \times ١٠٠\% \quad \text{.......................} \quad (١٦)$$

مثال (٢٠): متوسط علامات طلبة الأول الثانوي العلمي في مادة الرياضيات (٧٠) بانحراف معياري (١٠) ومتوسط علامات نفس الطلاب في الفيزياء (٧٥) بانحراف معياري (١٥) في أي من المادتين تتوزع العلامات بشكل أكثر تجانساً.

الحل:

$$\text{معامل التغير لمادة الرياضيات} = \frac{\text{الانحراف المعياري للرياضيات}}{\text{الوسط الحسابي للرياضيات}} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٠}{٧٠} \times ١٠٠\% = ١٤{,}٢٩\%$$

$$\text{معامل التغير لمادة الفيزياء} = \frac{١٥}{٧٥} \times ١٠٠\% = ٢٠\%$$

وبالتالي فإن العلامات في موضوع الرياضيات أكثر تجانساً.

مثال (٢١): مجموعة من المصانع أ ، ب ، جـ د ، أخذت عينات متساوية من العاملين فيها فكان الأوساط الحسابية والانحرافات المعيارية للأجور كما يلي:

المصنع	الوسط الحسابي للأجر	الانحراف المعياري
أ	٤٨٠	٣٠
ب	٦٠٠	٥٠
جـ	٧٢٠	٢٥
د	٣٦٠	٢٠

رتب هذه المصانع حسب توافد العدالة في توزيع الأجور.

الحل: معامل الاختلاف للمصنع أ $= \frac{\sigma_1}{\bar{س}_1} \times ١٠٠\% = \frac{٣٠}{٤٨٠} \times ١٠٠\% = ٦{,}٢٥\%$

معامل الاختلاف للمصنع ب = $\frac{٥٠}{٦٠٠}$ × ١٠٠٪ = ٨,٣٣٪

معامل الاختلاف للمصنع جـ = $\frac{٢٥}{٧٢٠}$ × ١٠٠٪ = ٣,٤٧٪

معامل الاختلاف للمصنع د = $\frac{٢٠}{٣٦٠}$ × ١٠٠٪ = ٥,٥٦٪

معامل الاختلاف للمصنع جـ < معامل الاختلاف للمصنع د < معامل الاختلاف للمصنع أ < معامل الاختلاف للمصنع ب وبالتالي فإن الأجور تتوزع بشكل أكثر عدالة في جـ ثم د ثم في أ ثم في ب.

(٤-٨-٢) العلامة المعيارية (القيمة المعيارية):

ليكن لدينا مجموعة من البيانات س١، ......، س ن ووسطها الحسابي ($\bar{س}$) والانحراف المعياري (σ) فإن العلامة (القيمة) المعيارية (ز) تعطى بالعلاقة التالية:

$$ز = \frac{\text{العلامة الخام} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} \quad \text{..................} \quad (١٧)$$

فنلاحظ من خلال التعريف بأن القيمة المعيارية هي المسافة على يمين أو يسار الوسط الحسابي معبراً عنه بوحدات الانحراف المعياري.

ويجدر بالملاحظة بأن التحويل إلى القيم المعيارية يعطينا مجتمعاً معيارياً وسطه الحسابي (صفر) وتباينه (١).

وكذلك فإن من خواص القيم المعيارية فإن تحويل القيم الخام في توزيع ما إلى قيم معيارية فإن توزيع القيم المعيارية يحتفظ بشكل التوزيع الأصلي. فإذا كان التوزيع الأصلي متماثلاً كان توزيع القيم المعيارية متماثلاً، وإذا كان ملتوياً نحو اليمين أو اليسار كان توزيع القيم المعيارية ملتوياً لليمين أو اليسار .... وهكذا.

مثال (٢٢): إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي (٦٠) والانحراف المعياري (١٠) أوجد ما يلي:

١- العلامة المعيارية المقابلة للعلامة الخام (٦٥) .

٢- العلامة المعيارية المقابلة للعلامة الخام (٥٥).

٣- العلامة المعيارية الخام المقابلة للوسط الحسابي.

٤- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (٢).

٥- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (-١,٥).

٦- العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (صفر).

الحل:

١- بما أن $\bar{س} = ٦٠$ ، $\sigma = ١٠$ فإن القيمة المعيارية (ز) المقابلة للعلامة الخام (٦٥) هي:

$$ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - ٦٠}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$$

٢- $ز_{٥٥} = \frac{٥٥ - ٦٠}{١٠} = -٠,٥$

٣- العلامة المعيارية المقابلة للوسط الحسابي $ز_{\bar{س}} = \frac{\bar{س} - \bar{س}}{\sigma} =$ صفر وبالتالي نلاحظ دائماً بأن العلامة المعيارية المقابلة للوسط الحسابي = صفر.

٤- الآن، المطلوب العلامة الخام إذا علمت العلامة المعيارية.

العلامة المعيارية المعطاة هي ز = ٢ = $\frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow س - ٦٠ = ٢٠$ ومنها س=٨٠ .

٥- ز = -١,٥ = $\frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow س - ٦٠ = -١٥ \Leftarrow س = ٦٠ - ١٥ = ٤٥$.

٦- ز = صفر = $\frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow س - ٦٠ =$ صفر $\Leftarrow س = ٦٠$.

ونلاحظ بأن العلامة الخام المقابلة للعلامة المعيارية (صفر) هي الوسط الحسابي.

مثال (٢١): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في مادة الفيزياء يساوي (٦٥) والانحراف المعياري(٥) والوسط الحسابي لعلامات نفس الشعبة في مادة الكيمياء يساوي (٦٠) والانحراف المعياري (٣) وكانت علامتي غدير في الفيزياء والكيمياء ٦٧، ٦٢ على الترتيب فهل تحصيل غدير في الفيزياء أفضل منه في الكيمياء؟ ولماذا؟

الحل:

سنقوم بتحويل هاتين العلامتين (الخام) إلى علامات معيارية حتى نستطيع المقارنة.

$$\text{الآن: العلامة المعيارية للفيزياء} = \frac{\text{علامة الفيزياء} - \text{الوسط الحسابي للفيزياء}}{\text{الانحراف المعياري للفيزياء}}$$

$$= \frac{٦٧ - ٦٥}{٥} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$$

العلامة المعيارية للكيمياء $= \frac{٦٢ - ٦٠}{٣} = \frac{٢}{٣} = ٠,٦٧$

وبما أن العلامة المعيارية للكيمياء أكبر من العلامة المعيارية للفيزياء فإن تحصيل غدير في الكيمياء أفضل.

مثال (٢٤): إذا كانت علامتي ليلى وشذى في امتحان ما هي ٦٧، ٥٠ والعلامات المعيارية المقابلة هي على الترتيب ١، -٠,٧ فأوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا الامتحان.

الحل: بما أن الوسط الحسابي ($\bar{س}$) والانحراف المعياري (σ) مجهولين، سنقوم بتكوين معادلتين ومن ثم نقوم بحل هاتين المعادلتين لإيجاد المجاهيل.

العلامة المعيارية المقابلة لعلامة ليلى = ١ = $\frac{٦٧ - \bar{س}}{\sigma} \Leftarrow \sigma = ٦٧ - \bar{س}$ ....(١)

العلامة المعيارية المقابلة لعلامة شذى = -٠,٧ = $\frac{٥٠ - \bar{س}}{\sigma} \Leftarrow -٠,٧\sigma = ٥٠ - \bar{س}$ ....(٢)

وبضرب المعادلة رقم(٢) بـ -١ وجمعها للأولى ينتج:

١,٧ σ = ١٧ ومنها $\sigma = \frac{١٧}{١,٧} = ١٠$

وبالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج:

١٠ = ٦٧ - $\bar{س}$ ومنها $\bar{س}$ = ٥٧

مثال (٢٥): إذا كانت علامات أحمد وعبير وليلى في امتحان ما هي ٧٠، ٦٥، ٨٠ والعلامات المعيارية المقابلة هي ١، -١، س أوجد قيمة س ؟

الحل:

بتطبيق قانون العلامة المعيارية (ز) = $\frac{\text{العلامة الخام - الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$

العلامة المعيارية لأحمد = ز = ١ = $\frac{٧٠ - \bar{س}}{\sigma} \Leftarrow \sigma = ٧٠ - \bar{س}$ ...(١)

العلامة المعيارية لعبير = ز = -١ = $\frac{٦٥ - \bar{س}}{\sigma} \Leftarrow -\sigma = ٦٥ - \bar{س}$ ... (٢)

العلامة المعيارية لليلى = ز = س = $\frac{80-\bar{س}}{\sigma}$ $\Leftarrow$ σ×س = ٨٠ − $\bar{س}$ ...(٣)

وبحل المعادلتين (١) & (٢) آنياً ينتج : $\bar{س}$ = ٦٧,٥ ، σ = ٢,٥ .

وبالتعويض في (٣) ينتج: ٢,٥ × س = ٨٠− ٦٧,٥ .

$\Leftarrow$ ٢,٥ س = ١٢,٥ ومنها ، س = $\frac{12.5}{2.5}$ = ٥

(٤-٩) العزوم (Moments):

تعريف (١): في حالة المشاهدات المفردة: ليكن لدينا المشاهدات $س_1$، $س_2$، ...، $س_ن$ فيمكن تعريف العزم الرائي على النحو التالي:

(١) العزم الرائي حول الصفر = $\acute{ع}_ر$ = $\frac{\sum س^ر}{ن}$

(٢) العزم الرائي حول الوسط الحسابي = $ع_ر$ = $\frac{\sum \left(س_و - \bar{س}\right)^ر}{ن}$

(٣) العزم الرائي حول العدد أ = $ع_ر$(أ) = $\frac{\sum \left(س_و - أ\right)^ر}{ن}$

حيث ر = ١، ٢، ٣، ...

مثال (٢٦): إليك القيم التالية: (٢، ٣، ١٠، ١، ٦).

أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر ثم حول الوسط الحسابي ومن ثم أوجد $ع_1$ (٤)، $ع_2$ (١٠).

الحل:

(١) $\acute{ع}_1 = \frac{\sum س_و}{ن} = \frac{2+3+10+1+6}{5} = \frac{22}{5} = 4.4$

(٢) $\acute{ع}_2 = \frac{\sum س_و^2}{ن} = \frac{(2)^2+(3)^2+(10)^2+(1)^2+(6)^2}{5} = \frac{150}{5} = 30$

(٣) $\acute{ع}_3 = \frac{\sum س_و^3}{ن} = \frac{(2)^3+(3)^3+(10)^3+(1)^3+(6)^3}{5} = \frac{1252}{5} = 250.4$

(٤) $\acute{ع}_4 = \frac{\sum س_و^4}{ن} = \frac{(2)^4+(3)^4+(10)^4+(1)^4+(6)^4}{5} = \frac{11394}{5} = 2278.8$

(٥) $ع_١ = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)}{ن} = \frac{(٢-٤,٤)+(٣-٤,٤)+(١٠-٤,٤)+(١-٤,٤)+(٦-٤,٤)}{٥}$

$=$ صفر

(٦) $ع_٢ = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^٢}{ن} = \frac{(٢-٤,٤)^٢+(٣-٤,٤)^٢+(١٠-٤,٤)^٢+(١-٤,٤)^٢+(٦-٤,٤)^٢}{٥}$

$= \frac{٥٣,٢}{٥} = ١٠,٦٤$

(٧) $ع_٣ = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^٣}{ن} = \frac{(٢-٤,٤)^٣+(٣-٤,٤)^٣+(١٠-٤,٤)^٣+(١-٤,٤)^٣+(٦-٤,٤)^٣}{٥}$

$= \frac{١٢٣,٨٤}{٥} = ٢٤,٧٦٨$

(٨) $ع_٤ = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^٤}{ن} = \frac{(٢-٤,٤)^٤+(٣-٤,٤)^٤+(١٠-٤,٤)^٤+(١-٤,٤)^٤+(٦-٤,٤)^٤}{٥}$

$= \frac{١١٦٠,٦٥٦}{٥} = ٢٣٢,١٣١٢$

(٩) $ع_١(٤) = \frac{(٢-٤)+(٣-٤)+(١٠-٤)+(١-٤)+(٦-٤)}{٥} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$

(١٠) $ع_٢(١٠) = \frac{(٢-١٠)^٢+(٣-١٠)^٢+(١٠-١٠)^٢+(١-١٠)^٢+(٦-١٠)^٢}{٥} = \frac{٢١٠}{٥} = ٤٢$

تعريف (٢): في حالة المشاهدات المتكررة:

ليكن لدينا المشاهدات $س_١$، $س_٢$، ... ، $س_ن$ والتكـــرارات المقابلـة $ك_١$، $ك_٢$، ... ، $ك_ن$ فيمكن تعريف العزوم الرائية على النحو التالي:

(١) العزم الرائي حول الصفر $= \acute{ع}_ر = \frac{\sum س_ر^{ر} . ك_ر}{\sum ك_ر}$

(٢) العزم الرائي حول الوسط الحسابي $= ع_ر = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^{ر} . ك_ر}{\sum ك_ر}$

(٣) العزم الرائي حول العدد أ $= ع_ر(أ) = \frac{\sum \left(س_ر - أ\right)^{ر} . ك_ر}{\sum ك_ر}$ حيث ر = ١، ٢، ...

تعريف (٣) في حالة المشاهدات المبوبة (الجداول التكرارية):

ليكن لدينا جدول تكراري مراكز فئاته $س_١$، ...، $س_م$ والتكرارات المقابلة هـي $ت_١$، $ت_٢$، ...، $ت_م$ فيمكن تعريف العزوم الرائية على النحو:

(١) العزم الرائي حول الصفر $= \acute{ع}_ر = \frac{\sum س_و^ر . ت_و}{\sum ت_و}$

(٢) العزم الرائي حول الوسط الحسابي $= ع_ر = \frac{\sum \left(س_و - \bar{س}\right)^ر . ت_و}{\sum ت_و}$

(٣) العزم الرائي حول العدد أ $= ع_ر(أ) = \frac{\sum \left(س_و - أ\right)^ر . ت_و}{\sum ت_و}$

ملاحظات:

(١) إذا كانت ر = ١ فإن $\acute{ع}_١ = \bar{س}$

أي أن العزم الأول حول الصفر يساوي الوسط الحسابي.

(٢) إذا كانت ر = ١ فإن $ع_١$ = صفر.

أي أن العزم الأول حول الوسط الحسابي يساوي صفر.

(٣) إذا كانت ر = ٢ فإن $ع_٢$ = التباين.

أي أن العزم الثاني حول الوسط الحسابي يساوي التباين.

(٤) يمكن كتابة العزوم الرائية حول الوسط الحسابي بدلالة العزوم حول الصفر على النحو التالي:

(أ) إذا كانت ر = ٢ فإن $ع_٢ = \frac{\sum \left(س_و - \bar{س}\right)^٢}{ن} = \frac{\sum س_و^٢}{ن} - \bar{س}^٢$

$\Leftarrow ع_٢ = \acute{ع}_٢ - \acute{ع}_١^٢$

(ب) إذا كانت ر = ٣ فإن $ع_٣ = \frac{\sum \left(س_و - \bar{س}\right)^٣}{ن} = \frac{\sum س_و^٣}{ن} - ٣\bar{س}\frac{\sum س_و^٢}{ن} + ٣\bar{س}^٣ - \bar{س}^٣$

$\Leftarrow ع_٣ = \acute{ع}_٣ - ٣\acute{ع}_١\acute{ع}_٢ + ٢\acute{ع}_١^٣$

(حـ) إذا كانت ر = ٤ فإن $ع_{٣} = \frac{\sum \left(س_{و} - \bar{س}\right)^{٤}}{ن}$

$$\Leftarrow ع_{٤} = \frac{\sum \left(س_{و}^{٤} - ٤س_{و}^{٣}\bar{س} + ٦\,س_{و}^{٢}\bar{س}^{٢} - ٤س_{و}.\bar{س}^{٣} + \bar{س}^{٤}\right)}{ن}$$

$$= \frac{\sum س_{و}^{٤}}{ن} - ٤\bar{س}\frac{\sum س_{و}^{٤}}{ن} + ٦\bar{س}^{٣}\frac{\sum س_{و}^{٢}}{ن} - ٤\bar{س}^{٤}\bar{س} + \bar{س}^{٤}$$

$$ع_{٤} = عَ_{٤} - ٤\,عَ_{١}عَ_{٣} + ٦\,عَ_{١}^{٢}عَ_{٢} - ٣\,عَ_{١}^{٤}$$

مثال (٧): إليك الجدول التالي الذي يبين أوزان مئة طفل.

الوزن (س)	٦	٦,٥	٧	٧,٥	٨	المجموع
عدد الأطفال ($ك_{و}$)	٢٠	١٠	٢٠	٣٠	٢٠	١٠٠

أوجد: (١) $عَ_{١}$ (٢) $عَ_{٢}$ (٣) $عَ_{٣}$ (٤) $عَ_{٤}$ (٥) $ع_{١}$ (٦) $ع_{٢}$ (٧) $ع_{٣}$ (٨) $ع_{٤}$ (٩) $ع_{٢}$ (٧)

$س_{و}$	$ك_{و}$	$س_{و} . ك_{و}$	$س_{و}^{2} . ك_{و}$	$س_{و}^{٣} . ك_{و}$	$س_{و}^{٤} . ك_{و}$	$(س_{و} - ٧)^{٢} . ك_{و}$
٦	٢٠	١٢٠	٧٢٠	٤٣٢٠	٢٥٩٢٠	٢٠
٦,٥	١٠	٦٥	٤٢٢,٥	٢٧٤٦,٢٥	١٧٨٥٠,٦٢٥	٢,٥
٧	٢٠	١٤٠	٩٨٠	٦٨٦٠	٨٤٠٢٠	صفر
٧,٥	٣٠	٢٢٥	١٦٨٧,٥	١٢٦٥٦,٢٥	٩٤٩٢١,٨٧٥	٧,٥
٨	٢٠	١٦٠	١٢٨٠	١٠٢٤٠	٨١٩٢٠	٢٠
المجموع	١٠٠	٧١٠	٥٠٩٠	٣٦٨٢٢,٥	٢٦٨٦٣٢,٥	٥٠

الحل:

(١) $عَ_{١} = \frac{٧١٠}{١٠٠} = ٧,١$

(٢) $عَ_{٢} = \frac{\sum س_{و}^{٢}.ك_{و}}{\sum ك_{و}} = \frac{٥٠٩٠}{١٠٠} = ٥٠,٩$

(٣) $\text{ع}_{٣} = \frac{٣٦٨٢٢,٥}{١٠٠} = ٣٦٨,٢٢٥$

(٤) $\text{ع}_{٤} = \frac{\sum \text{س}_{\text{و}}^{٤}.\text{ك}_{\text{و}}}{\sum \text{ك}_{\text{و}}} = \frac{٢٦٨٦٣٢,٥}{١٠٠} = ٢٦٨٦,٣٢٥$

(٥) $\text{ع}_{١}$ = صفر [حسب الملاحظة (١)]

(٦) $\text{ع}_{٢} = \bar{\text{ع}}_{٢} - \bar{\text{ع}}_{١}^{٢} = ٥٠,٩ - (٧,١)^{٢} = ٠,٤٩$

(٧) $\text{ع}_{٣} = \bar{\text{ع}}_{٣} - ٣\bar{\text{ع}}_{١}\bar{\text{ع}}_{٢} + ٢\bar{\text{ع}}_{1}^{3} = ٣٦٨,٢٢٥ - ٣ \times ٧,١ \times ٥٠,٩ + ٢\times(٧,١)^{3} = -٠,١٢٣$

(٨) $\text{ع}_{٤} = \bar{\text{ع}}_{٤} - ٤\bar{\text{ع}}_{١}\bar{\text{ع}}_{٣} + ٦\bar{\text{ع}}_{١}^{٢}\bar{\text{ع}}_{٢} - ٣\bar{\text{ع}}_{1}^{٤} = ٢٦٨٦,٣٢٥ - ٤ \times ٧,١ \times ٣٦٨,٢٢٥$

$+ ٦ \times (٧,١)^{٢} \times ٥٠,٩ - ٣ \times (٧,١)^{٤} = ٠,٤٤٥$

(٩) $\text{ع}_{٢}(٧) = \frac{\sum(\text{س}_{\text{و}}-٧)^{٢}.\text{ك}_{\text{و}}}{\sum \text{ك}_{\text{و}}} = \frac{٥٠}{١٠٠} = ٠.٥$

(٤-١٠) الالتواء (The Skewness):

تعريف (١): يعرف الالتواء بأنه درجة التماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع ما.

استخداماته:

يستخدم الالتواء لمعرفة نوع التوزيع فإذا كان:

(أ) مقياس الالتواء موجباً فعندها نقول بأن التوزيع ملتوٍ نحو اليمين (موجب الالتواء).

(ب) مقياس الالتواء سالباً فعندها نقول بأن التوزيع ملتوٍ نحو اليسار (سالب الالتواء).

(حـ) مقياس الالتواء يساوي الصفر فإن التوزيع متماثلٌ.

تعريف (٢): مقياس الالتواء لمجموعة من البيانات أو لجدول تكراري كالتالي:

(أ) معامل بيرسون الأول للالتواء = $\frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$

$= \frac{\bar{\text{س}} - \text{م}}{\sigma}$

٣ (الوسط – الوسيط)

(ب) معامل بيرسون الثاني للالتواء = $\dfrac{\qquad\qquad}{\text{الانحراف المعياري}}$

$$= \frac{3(\bar{\text{س}} - \text{و})}{\sigma}$$

(حـ) معامل الالتواء الربيعي = $\dfrac{\text{الربيع الأعلى} - 2 \times \text{الربيع الأوسط} + \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}$

$$= \frac{\text{ر}_3 - 2 \times \text{ر}_2 + \text{ر}_1}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}$$

(د) معامل الالتواء المئيني = $\dfrac{\text{المئين التسعون} - 2 \times \text{المئين الخمسون} + \text{المئين العاشر}}{\text{المئين التسعون} - \text{المئين العاشر}}$

(هـ) معامل الالتواء العزومي = $\dfrac{\text{العزم الثالث حول الوسط}}{\text{مكعب الانحراف المعياري}}$

$$= \frac{\text{ع}_3}{\sigma^3} = \frac{\text{ع}_3}{\left(\sqrt{\text{ع}_2}\right)^3}$$

مثال (٢٨): الجدول التالي يبين فئات الأجر وإعداد العمال.

فئات الأجر	٤٠-٥٩	٦٠-٧٩	٨٠-٩٩	١٠٠-١١٩	١٢٠-١٣٩
عدد العمال	٨	١٢	٢٠	٨	٢

علماً بأن: $\bar{\text{س}}$ = ٨٣,٦، و = ٨٥، ر_1 = ٦٧,٥، ر_3 = ٩٧,٥، σ = ٢٠,٩٥، م = ٨٨.

أوجد:

(١) معامل بيرسون الأول للالتواء.

(٢) معامل الالتواء الربيعي.

(٣) معامل بيرسون الثاني للالتواء.

الحل:

(١) معامل بيرسون الأول للالتواء = $\frac{\bar{\text{س}} - \text{م}}{\sigma} = \frac{\text{٨٣,٦} - \text{٨٨}}{\text{٢٠,٩٥}} = -\text{٠,٢١}$

(٢) معامل بيرسون الثاني للالتواء= $\frac{\text{٣}(\bar{\text{س}} - \text{و})}{\sigma} = \frac{\text{٣}(\text{٨٣,٦} - \text{٨٥})}{\text{٢٠,٩٥}} = -\text{٠,٢٠}$

(٣) معامل الالتواء الربيعي= $\frac{\text{ر}_{\text{٣}} - \text{٢} \times \text{ر}_{\text{٢}} + \text{ر}_{\text{١}}}{\text{ر}_{\text{٣}} - \text{ر}_{\text{١}}} = \frac{\text{٩٧,٥} - \text{٢} \times \text{٨٥} + \text{٦٧,٥}}{\text{٩٧,٥} - \text{٦٧,٥}}$

$= \frac{\text{١٦٥} - \text{١٧٠}}{\text{٣٠}} = \frac{-\text{٥}}{\text{٣٠}} = -\text{٠,١٦٧}$

مثال (٢٩): بالرجوع إلى المثال (٢٧) احسب معامل الالتواء العزومي.

الحل: بما أن $\text{ع}_{\text{٣}} = -\text{٠,١٢٣}$، $\text{ع}_{\text{٢}} = \text{٠,٤٩}$.

فإن:

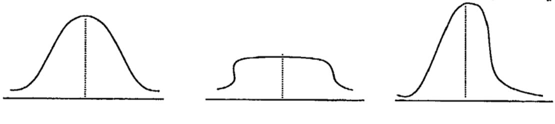
معامل الالتواء العزومي = $\frac{\text{ع}_{\text{٣}}}{\left(\sqrt{\text{ع}_{\text{٢}}}\right)^{\text{٣}}} = \frac{-\text{٠,١٢٣}}{\left(\sqrt{\text{٠,٤٩}}\right)^{\text{٣}}} = -\text{٠,٣٥٨}$

وهذا يعني بأن التوزيع ملتوي نحو اليسار (سالب الالتواء).

(٤-١١): التفرطح (The Kurtosis):

تعريف (١): التفرطح هو درجة تدبب قمة التوزيع قياساً إلى التوزيع الطبيعي.

فالتوزيع ذو القمة العالية نسبياً كما في الشكل (١) يسمى منحنى مدبب، والتوزيع الذي قمته مسطحة كما في الشكل (٢) يسمى مفرطحاً والتوزيع الطبيعي في الشكل (٣) حيث قمته ليست مدببة ولا مفرطحة يسمى متوسط التفرطح.



مدبب — مفرطح — معتدل

الشكل (١) — الشكل (٢) — الشكل (٣)

تعريف (٢): يعرف مقياس التفرطح لمجموعة من البيانات أو لجدول تكراري كالآتي:

(أ) معامل التفرطح العزومي= $\alpha_4 = \dfrac{\text{العزم الرابع حول الوسط الحسابي}}{\text{مربع العزم الثاني حول الوسط}} = \dfrac{\text{العزم الرابع حول الوسط}}{\text{مربع التباين}}$

$$\Leftarrow \alpha_4 = \frac{ع_4}{ع_2^2} = \frac{ع_4}{\sigma^4}$$

(ب) معامل التفرطح المئيني= $k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{\text{المئين التسعون} - \text{المئين العاشر}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ر_3 - ر_1}{م_{90} - م_{10}}\right)$$

ملاحظات:

(١) إذا كانت α_4 = ٣ فإن التوزيع معتدل.

(٢) إذا كانت α_4 أكبر من ٣ فإن التوزيع مدبب.

(٣) إذا كانت α_4 أقل من ٣ فإن التوزيع مفرطح.

(٤) إذا كانت k = ٠,٢٦٣ فالتوزيع معتدل.

(٥) إذا كانت k أكبر من ٠,٢٦٣ فالتوزيع مدبب.

(٦) إذا كانت k أقل من ٠,٢٦٣ فالتوزيع مفرطح.

مثال (٣٠): بالرجوع إلى المثال رقم (٢٧) احسب معامل التفرطح العزومي واذكر نوع التوزيع.

الحل: حيث أن: $ع_4$ = ٠,٤٤٥، $ع_2$ = ٠,٤٩.

فإن: $\alpha_4 = \dfrac{ع_4}{ع_2^2} = \dfrac{0.445}{(0.49)^2} = 1.853$

وبما إن α_4 أقل من ٣ فإن التوزيع مفرطح.

(٤-١٢) مسائل محلولة:

مسألة (١): إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي ($\sqrt{٥٠}$) وكان مجموع مربع القيم = ٤٥٠٠ والوسط الحسابي لهذه القيم يساوي = ٢٠ . أوجد عدد القيم.

الحل:

بما أن $\sigma = \sqrt{٥٠}$ ، $\sum س^{٢} = ٤٥٠٠$ ، $\bar{س} = ٢٠$.

فإنه باستخدام العلاقة:

$$\sigma^{٢} = \frac{\sum س^{٢}}{ن} - \bar{س}^{٢}$$ ينتج :

$$٥٠ = \frac{٤٥٠٠}{ن} - (٢٠)^{٢}$$

$$٥٠ = \frac{٤٥٠٠}{ن} - ٤٠٠ \Leftarrow \frac{٤٥٠٠}{ن} = ٤٥٠ \Leftarrow ن = \frac{٤٥٠٠}{٤٥٠} = ١٠$$

مسألة (٢): إليك الجدول التالي الذي يبين الأجرة الأسبوعية لخمسين عاملاً في مصنع.

الفئات	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	٤٥-٤٩	المجموع
التكرار	٥	٢٠	١٧	٨	٥٠

أوجد : (أ) الانحراف المتوسط (ب) الانحراف المعياري

(جـ) التباين (د) نصف المدى الربيعي (هـ) المدى

(و) النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة $(\bar{س} - \sigma \text{ ، } \bar{س} + \sigma)$

الحل:

الفئات	$ت_{ر}$	$س_{ر}$	$س_{ر} \times ت_{ر}$	$(س_{ر} - \bar{س})$	$\lvert س_{ر} - \bar{س} \rvert$	$\lvert س_{ر} - \bar{س} \rvert \times ت_{ر}$	$(س_{ر} - \bar{س})^{2} \times ت_{ر}$
٣٠-٣٤	٥	٣٢	١٦٠	-٧,٨	٧,٨	٣٩	٣٠٤,٢
٣٥-٣٩	٢٠	٣٧	٧٤٠	-٢,٨	٢,٨	٥٦	١٥٦,٨
٤٠-٤٤	١٧	٤٢	٧١٤	٢,٢	٢,٢	٣٧,٤	٨٢,٢٨
٤٥-٤٩	٨	٤٧	٣٧٦	٧,٢	٧,٢	٥٧,٦	٤١٤,٧٢
المجموع	٥٠		١٩٩٠			١٩٠	٩٥٨

$\overline{\text{س}} = \frac{١٩٩٠}{٥٠} = ٣٩,٨$

١- الانحراف المتوسط $= \frac{\text{ح.م}}{} = \frac{١٩٠}{٥٠} = ٣,٨$

٢- الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})^{٢}\,\text{ت}_{\text{ر}}}{\sum \text{ت}_{\text{ر}}}} = \sqrt{\frac{٩٥٨}{٥٠}} = \sqrt{١٩,١٦} = ٤,٣٨$

٣- التباين $= \sigma^{٢} = (\sqrt{١٩,١٦})^{٢} = ١٩,١٦$

٤-

الفئات	ت ر	أقل من حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٢٥-٢٩	صفر	٢٩,٥	صفر
٣٠-٣٤	٥	٣٤,٥	٥
٣٥-٣٩	٢٠	٣٩,٥	٢٥
٤٠-٤٤	١٧	٤٤,٥	٤٢
٤٥-٤٩	٩	٤٩,٥	٥٠

نصف المدى الربيعي $= \frac{\text{م}_{٧٥} - \text{م}_{٢٥}}{٢}$

رتبة $\text{م}_{٧٥} = \frac{٧٥}{١٠٠} \times ٥٠ = ٣٧,٥$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & ٣٩,٥ & \leftarrow & ٢٥ & \\ ٥ & \text{م}_{٧٥} & \leftarrow & ٣٧,٥ & ١٢,٥ \quad ١٧ \\ & ٤٤,٥ & \leftarrow & ٤٢ & \end{array}$$

❖ $\text{م}_{٧٥} = ٣٩,٥ + \frac{١٢,٥}{١٧} \times ٥ = ٤٣,١٨$

رتبة $\text{م}_{٢٥} = \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٥٠ = ١٢,٥ \Leftarrow$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & ٣٤,٥ & \leftarrow & ٥ & \\ ٥ & \text{م}_{٢٥} & \leftarrow & ١٢,٥ & ٧,٥ \quad ٢٠ \\ & ٢٩,٥ & \leftarrow & ٢٥ & \end{array}$$

❖ $م_{٢٥} = ٣٤,٥ + \frac{٧,٥}{٢٠} \times ٥ = ٣٤,٥ + ١,٨٧٥ = ٣٦,٣٧٥$

وبالتالي = نصف المدى الربيعي = ر = $\frac{٤٣,١٨ - ٣٦,٣٧٥}{٢} = ٣,٤٠٢٥$

٥- المدى = الحد الأعلى الفعلي للفئة الأخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى

$= ٤٩,٥ - ٢٩,٥ = ٢٠$

٦- النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة ($\bar{س} - \sigma$ ، $\bar{س} + \sigma$)، النسبة المئوية العمال الذين يقعون ضمن الفترة (٣٩,٨-٤,٣٨، ٣٩,٨+٤,٣٨) = (٣٥,٤٢، ٤٤,١٨).

الآن: نجد الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٥,٤٢).

$$\begin{array}{c|ccc|c} & ٣٤,٥ & \leftarrow & ٥ & \\ ٥ \quad ٠,٩٢ & ٣٥,٤٢ & \leftarrow & س & ٢٠ \\ & ٣٩,٥ & \leftarrow & ٢٥ & \end{array}$$

❖ $س = ٥ + \frac{٠,٩٢}{٥} \times ٢٠ = ٨,٦٨$

الرتبة المئينية للمشاهدة (٣٥,٤٢) = $\frac{٨,٦٨}{٥٠} \times ١٠٠\% = ١٧,٣٦\%$

نجد الرتبة المئينية للمشاهدة (٤٤,١٨).

$$\begin{array}{c|ccc|c} & ٣٩,٥ & \leftarrow & ٢٥ & \\ ٥ \quad ٤,٦٨ & ٤٤,١٨ & \leftarrow & س & ١٧ \\ & ٤٤,٥ & \leftarrow & ٤٢ & \end{array}$$

$س = ٢٥ + \frac{٤,٦٨}{٥} \times ١٧$

$= ٢٥ + ١٥,٩١٢ = ٤٠,٩١٢$

الرتبة المئينية = = $\frac{٤٠,٩١٢}{٥٠} \times ١٠٠\% = ٨١,٨٢٤\%$ وبالتالي النسبة المئوية للعمال ضمن هذه الفترة = ٨١,٨٢٤٪ - ١٧,٣٦٪ = ٦٤,٤٦٤٪.

مسألة (٣): مجموعة من البيانات فيها: $\sigma = ٨$ ، $ن = ٣٠$ ، $\bar{س} = ٥٠$ أوجد $\sum س_ر^٢$

الحل:

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum س_ر^٢}{ن} - \bar{س}^٢} \Leftarrow ٨ = \sqrt{\frac{\sum س_ر^٢}{٣٠} - (٥٠)^٢}$$

$$\Leftarrow ٦٤ = \frac{\sum س_ر^٢}{٣٠} - ٢٥٠٠ \Leftarrow \frac{\sum س_ر^٢}{٣٠} = ٢٥٦٤ \Leftarrow \sum س_ر^٢ = ٧٦٩٢٠$$

مسألة (٤): إذا كان التبـاين للقيـم −٤، ٥، أ ، ١ هـو (١١,٥) أوجـد الوسـط الحسـابي وقيمة أ ؟

الحل:

$$\text{التباين} = \sigma^٢ = \frac{\sum س^٢}{ن} - \bar{س}^٢$$

$$١١,٥ = \frac{١٦ + ٢٥ + أ^٢ + ١}{٤} - \left(\frac{-٤ + ٥ + أ + ١}{٤}\right)^٢$$

$$١١,٥ = \frac{٤٢ + أ^٢}{٤} - \left(\frac{٢ + أ}{٤}\right)^٢$$

$$١٨٤ = ١٦٨ + ٤أ^٢ - (أ^٢ + ٤أ + ٤)$$

$$\Leftarrow ٣أ^٢ - ٤أ - ٢٠ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow (٣أ - ١٠)(أ + ٢) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow ٣أ - ١٠ = \text{صفر أو } أ + ٢ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow أ = \frac{١٠}{٣} \text{ أو } أ = -٢$$

وبالتالي إذا كانت $أ = \frac{١٠}{٣} \Leftarrow \bar{س} = ٥,٣٣$

إذا كانت $أ = -٢ \Leftarrow \bar{س} = \text{صفر}$

مسألة (٥): إذا كانت انحرافات سـتة قيـم عـن وسـطها الحسـابي هـي −٤، ٥، −٢ ، ٧ −٦، صفر . جد الانحراف المعياري لهذه القيم؟ وكذلك الانحراف المتوسط.

الحل:

الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^{٢}}{٢}} = \sqrt{\frac{(-٤)^{٢} + (٥)^{٢} + (-٢)^{٢} + (٧)^{٢} + (-٦)^{٢} + (٠)^{٢}}{٦}}$

$= \sqrt{\frac{١٦ + ٢٥ + ٤ + ٤٩ + ٣٦ + ٠}{٦}} = \sqrt{\frac{١٣٠}{٦}}$

$= \sqrt{٢١,٦٧} = ٤,٦٥٥$

الانحراف المتوسط $= \text{ح.م} = \frac{\sum |\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}|}{\text{ن}} = \frac{|-٤| + |٥| + |-٢| + |٧| + |-٦| + |\text{صفر}|}{٦}$

$= \frac{٤ + ٥ + ٢ + ٧ + ٦ + ٠}{٦} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$

مسألة (٦): إليك المعطيات التالية:

$\sum \text{س}^{٢} = ٨٥٠٠$، ن $= ٢٠$، $\sigma = ٥$

أوجد:

(أ) الوسط الحسابي.

(ب) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

(حـ) مجموع مربعات القيم عن القيمة (١٨).

(د) إذا عدلت القيم حسب العلاقة:

$\text{ص} = ٢\,\text{س} - ٥$

أوجد كلاً من $\bar{\text{ص}}$ ، $\sigma^{٢}_{\text{ص}}$، $\sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}$

الحل:

(أ) باستخدام العلاقة $\sigma^{٢} = \frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{٢}$

$\Leftarrow \bar{\text{س}}^{٢} = \frac{٨٥٠٠}{٢٠} - (٥)^{٢} = ٤٢٥ - ٢٥ = ٤٠٠$

$\Leftarrow \bar{\text{س}} = ٢٠$

(ب) باستخدام العلاقة $\sigma^{2} = \dfrac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}$

$\Leftarrow \sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^{2} = \text{ن} \times \sigma^{2} = ٢٠ \times ٢٥ = ٥٠٠$

(حـ) لتكن $\text{ح}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} - ١٨$

$\bar{\text{س}} = \text{ف} + \dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$

$٢٠ = ١٨ + \dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}}{٢٠} \Leftarrow \sum \text{ح}_{\text{ر}} = ٤٠$

$\sigma^{2} = \dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}^{2}}{\text{ن}} - \left(\dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}}{\text{ن}}\right)^{2}$

$٢٥ = \dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}^{2}}{٢٠} - \left(\dfrac{٤٠}{٢٠}\right)^{2} \Leftarrow \dfrac{\sum \text{ح}_{\text{ر}}^{2}}{٢٠} = ٢٩$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}}^{2} = ٥٨٠$

(د) $\bar{\text{ص}} = ٢\bar{\text{س}} - ٥ = ٢ \times ٢٠ - ٥ = ٣٥$

$\sigma_{\text{ص}}^{2} = (٢)^{2} . \sigma_{\text{س}}^{2} = ٤ \times ٢٥ = ١٠٠$

$\sigma_{\text{ص}}^{2} = \dfrac{\sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{2}}{\text{ن}} \Leftarrow \sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{2} = \text{ن} \times \sigma_{\text{ص}}^{2} = ٢٠ \times ١٠٠ = ٢٠٠٠$

تمارين الوحدة الرابعة

س١: للمشاهدات التالية: -٧، ٥، ٢، ٠ ، ١، ٨ احسب ما يلي:

(١) المدى (٢)الانحراف المتوسط (٣) الانحراف المعياري (٤) التباين.

س٢: للقيم التالية: ٣، ٤، ٥، ٦، ١٧، ١٢، ١٤، ١١، ١٢، ١٤ أحسب ما يلي:

(١) المدى (٢) الانحراف المتوسط (٣) الانحراف المعياري (٤) التباين.

س٣: إليك البيانات التالية التي تمثل علامات (٣٠) طالب في امتحان ما .

٢٨	٢١	٢٣	٢٤	١٥	٢٣
٢٧	٢٢	٢٤	١٥	١٧	٢٤
١٧	٢٤	١٩	٢٧	١٩	٢٦
١٥	٢٥	٢٠	٢٨	٢٠	٢٥
٢٠	٢٧	١٦	٢٩	٢٤	٢٣

المطلوب:

أ) ضع هذه البيانات في جدول تكراري عدد فئاته (٦).

ب) أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات.

جـ) أوجد الانحراف المعياري للجدول.

د) قارن بين الإجابتين في (ب) و (جـ)

هـ) أوجد النسبة المئوية للعلامات ضمن الفترة $(\bar{\text{س}} - \sigma ، \bar{\text{س}} + \sigma)$.

س٤: الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري التي حصل عليها الطلبة في الكلية في مساق الإحصاء في التربية.

العلامات	٣٠–٣٩	٤٠–٤٩	٥٠–٥٩	٦٠–٦٩	٨٠–٧٩	٨٠–٨٩	٩٠–٩٩	المجموع
عدد الأشخاص	١	٣	١١	٢١	٤٣	٣٢	٩	١٢٠

أوجد ما يلي:

١- الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

٢- الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.

٣- الانحراف المتوسط.

٤- التباين.

٥- نصف المدى الربيعي.

٦- عدد الطلبة ضن الفترة ($\bar{س} - \sigma$ ، $\bar{س} + \sigma$).

٧- معامل الاختلاف النسبي.

س٥: الجدول التالي يبين أوزان (٥٠) شخص.

الوزن (س)	٥٥	٦٠	٦٥	٧٠	٧٥	٨٠	المجموع
عدد الأشخاص	٣	٧	١٥	١٠	١٠	٥	٥٠

احسب ما يلي:

١- الانحراف المتوسط   ٢- الانحراف المعياري.

س٦: إذا كانت انحرافات خمسة قيم عن وسطها الفرضي هي: أ ، ٣أ ، ٢أ ، −٤أ ، −٢أ

وكان التباين لهذه القيم يساوي ٢٥ أوجد قيمة أ .

س٧: إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي = ٣٠ والانحراف المعياري يساوي (٥) وعدلت هذه المشاهدات وفق المعادلة : $ص = ٥٠ - \frac{١}{٢}س$ أوجد الوسط والانحراف بعد التعديل.

س٨: إذا كان لدينا بيانات فيها:

$\sigma = ٨$ ، $\sum س_ر = ٢٠٠$ ، ن = ١٠ أوجد $\sum س_ر^٢$

س٩: أخذت عينتان من مجتمعين مستقلين عن بعضها البعض فأعطت النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\sum_{ر=1}^{٣٠} س_ر = ٤٥٠$	$\sum_{ر=1}^{٢٠} س_ر = ١٠٠$
$\sum_{ر=1}^{٣٠} س_ر^2 = ٦٩٠٠$	$\sum_{ر=1}^{٢٠} س_ر^2 = ٣٥٠٠$

١- احسب الوسط الحسابي لكل عينة.

٢- دمجت العينتان أحسب الوسط الحسابي الناتج عن الدمج.

٣- أوجد الانحراف المعياري لكل عينة.

٤- أوجد الانحراف المعياري الناتج عن دمج العينتان.

٥- احسب معامل الاختلاف لكل عينة، أي العينتان أكثر اختلافاً؟

س١٠: إذا كان $\sum س_ر^2 \times ت_ر = ١٣٠٠٠$، $\sum س_ر \times ت_ر = ٥٠٠$. وكان $\sum ت_ر = ١٠٠$ أوجد الانحراف المعياري .

س١١: إذا كان المدى الربيعي لمجموعة من البيانات يساوي (٢٠) وكان الربيع الأعلى يساوي (٥٠) أوجد الربيع الأدنى.

س١٢: إذا كان التباين لمجموعة بيانات يساوي ١٠ وكان عدد البيانات (٢٠) أوجد مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي.

س١٣: إليك القيم التالية: (٦، ٣، ٨، ٩، ٥، ٧، ٤)

(١) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الصفر.

(٢) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

(٣) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول العدد (٧).

س١٤: للجدول التالي:

س	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	٢٢	المجموع
ك	١	٤	٦	١٠	٧	٢	٣٠

(أ) استخرج العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

(ب) احسب معامل التفرطح العزومي، معامل الالتواء العزومي.

س١٥: إذا كان العزم الثاني حول الوسط لتوزيعين هما ٩، ١٦ على الترتيب بينما العزم الثالث حول الوسط الحسابي يساوي -١٢,٩، -٨,٩ أي التوزيعين أكثر التواء لليسار.

س١٦: إذا كان العزوم الأربعة الأولى حول الرقم ٣ تساوي -٢، ١٠، -٢٥، ٥٠ أوجد العزوم المقابلة:

(١) حول الوسط.

(٢) حول الرقم ٥.

(٣) حول الصفر .

س١٧: إذا كان العزم الثاني حول الوسط يساوي (٧) والعزم الثالث يساوي (١٦) أوجد مقياس الالتواء العزومي واذكر نوع التوزيع.

س١٨: الجدول التالي يبين أجور ثلاثون عاملاً في مصنع بالدينار الأردني خلال أسبوع معين.

الأجور الأسبوعية	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤	٣٥-٣٩	٤٠-٤٤	المجموع
عدد العمال	٩	٧	٦	٣	٥	٣٠

احسب ما يلي:

(أ) العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

(ب) العزوم الأربعة الأولى حول الصفر.

(حـ) العزم الثاني حول العدد (٣٠).

(د) معامل بيرسون الأول للالتواء.

(هـ) معامل بيرسون الثاني للالتواء.

(و) مقياس الالتواء الربيعي.

(ز) مقياس الالتواء المئيني.

(ح) مقياس الالتواء العزومي.

(ط) مقياس التفرطح العزومي.

(ي) مقياس التفرطح المئيني.

(ق) حدد نوع التوزيع من حيث الالتواء والتفرطح.

س١٩: بالاستفادة من السؤال (١٥) وإذا كان العزم الرابع حول الوسط لتوزيعين هما: ٧٨٠، ٢٣٠ على الترتيب أي التوزيعين أكثر تقريبا للتوزيع الطبيعي لو نظرنا إلى:

(أ) تدبب القمة.

(ب) الالتواء.

س٢٠: عبر عن العزم الخامس حول الوسط الحسابي بدلالة العزوم حول الصفر.

الوحدة الخامسة

٥

الارتباط والانحدار

Correlation & Regression

الوحدة الخامسة

الارتباط والانحدار

Correlation & Regression

مقدمة:

في الوحدات السابقة تعرضنا لدراسة ظاهرة واحدة أو متغير واحد بمعزل عن العوامل الأخرى وأمكننا التوصل إلى مقاييس تعبّر عن هذه الظاهرة وأمثلة ذلك مقاييس النزعة المركزية والتشتت. وهذه المقاييس أساسية وهامة في التعرف على خصائص ومميزات أي ظاهرة. ومع هذا فإنها ليست كافية للحكم الدقيق على سلوك الظاهرة. ويرجع السبب في ذلك إلى أن أي ظاهرة لا تتغير بمعزل عن الظواهر الأخرى المحيطة والمرتبطة بها. لذلك فمن المنطقي أن الحكم على ظاهرة ما يجب أن يتم من خلال دراسة علاقتها بالظواهر الأخرى التي تؤثر بها أو تتأثر بها. وعملياً فمعظم الظواهر تكون سبباً ونتيجة. ففي حين تكون بعض الظواهر سبباً في التغيرات التي نلاحظها على ظاهرة أو ظواهر أخرى فإن البعض الآخر يكون نتيجة لهذه التغيرات، لذلك فإنه من المقبول والمتوقع أن تلك الظواهر التي هي نتائج لظواهر أخرى قد تكون سبباً في التأثير على ظواهر مختلفة وهكذا، وهذا يخلص بنا إلى وجود علاقة بين أي ظاهرة والظواهر الأخرى. ودراسة هذه العلاقة تمكننا من القدرة على التنبؤ بتغيرات هذه الظاهرة من خلال التعرف على أثر العوامل الأخرى المؤثرة فيها. وتزداد دقة التنبؤ أو التوقع كلما كانت دراستنا شاملة لأكبر عدد من المؤثرات التي تؤخذ في الحسبان عند إجراء هذا التنبؤ. فمثلاً إذا رمزنا لظاهرة ما بالرمز ص وكانت المتغيرات أو العوامل الأخرى التي تؤثر عليها هي س$_{١}$، ... ، س$_{ن}$ فإننا نكتب ص = ق(س$_{١}$، ...، س$_{ن}$). أي أن ص هو متغير تابع ناتج لمحصلة التأثير عوامل أخرى هي س$_{١}$، ... ، س$_{ن}$ والتي تسمى متغيرات مستقلة. وأمثلة ذلك كثيرة في العلوم المختلفة، ففي المجال الاقتصادي نجد بأن الطلب على سلعة معينة تتأثر بعوامل عدة منها السعر لتلك السلعة، أسعار السلع البديلة، أسعار السلع المكملة، دخل

المستهلك، المستوى التعليمي، الجنس، السن، .... الخ.

وفي المجال الزراعي نجد أن إنتاج محصول معين نتيجة تأثير عوامل عدة منها أنواع البذور المستخدمة، سعر البذور، الأسمدة المستخدمة، طريقة الزراعة، كمية المياه وحالة الجو، المساحة المزروعة، كمية العمالة المستخدمة .... الخ.

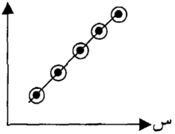
وفي المجال الصحي أيضاً نجد أن الإصابة بمرض معين يمكن أن تكون نتيجة لعدة أسباب نذكر منها التاريخ الوراثي لهذا المرض في العائلة، الحالة الاجتماعية، المعيشة للفرد، التعرض لأحد العوامل التي تؤدي للإصابة بهذا المرض كالجو غير النقي والمياه الغير النقية والأطعمة غير الصحية وهكذا. ومما سبق يمكن أن نستخلص أن هناك علاقة سببية بين ظاهرة ما من ناحية، وبين ظاهرة أو عدة ظواهر من ناحية أخرى وكيفية دراسة هذه العلاقة السببية هو أحد الأساليب الإحصائية التي يرجع الفضل فيها إلى السير فرانسيس جالتون "Sir Francis Galton" حيث حاول دراسة العلاقة بين أطوال مجموعة من الآباء وبين متوسط أطوال أبنائهم. وقد وجد إلى أن أبناء الآباء طويلي القامة ليسوا بنفس درجة طول آبائهم وأيضاً أن الأبناء قصيري القامة ليسوا بنفس درجة قصر آبائهم ومن ذلك استنتج أن أطوال الأبناء تعود أو تنحدر لمتوسط الطول للجنس البشري ومن هذه الدراسة أطلق لفظ الانحدار (Regression) ليفيد الدراسة الإحصائية للعلاقة السببية بين المتغيرات.

ومن ناحية أخرى فإن دراسة العلاقة بين المتغيرات يمكن أن تقتصر على تحديد مدى وجود علاقة بين المتغيرات، فإذا وجدت هذه العلاقة فهل هي قوية أم ضعيفة وهل هي طردية أم عكسية .... وهذا الحد من النتائج يعبّر عنه الارتباط. إذا يهتم الانحدار بدراسة العلاقة السببية بين المتغيرات. بينما يهتم الارتباط بدراسة مدى وجود العلاقة بين المتغيرات من حيث القوة والاتجاه. ومن الطبيعي أن يكون هنالك علاقة بين الارتباط والانحدار طالما أنهما يهدفان للوصول إلى التعرف على العلاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة.

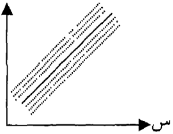
(٥-١) الارتباط: Correlation

لقد ذكرنا آنفاً أن الارتباط هو ذلك الأسلوب الذي يفسر درجة قوة واتجاه العلاقة بين المتغيرين س، ص دون النظر إلى السببية بينهما. فقد يرتبط هذين

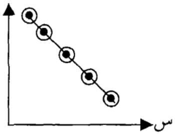
المتغيرين بعلاقة خطية أو غير خطية وقد لا تكون بينهما أي علاقة على وجه الإطلاق. فمثلاً لا يتوقع أن تكون هنالك علاقة بين طول الفرد (س) وعمر والده (ص) بينما يتوقع أن تكون هنالك علاقة بين طول الفرد (س) ووزنه (ص) ويستخدم أشكال الانتشار (Scatter Diagram) لإعطاء فكرة مبدئية عن شكل واتجاه العلاقة بين هذين المتغيرين، إن وجدت. فإذا كان لدينا عدد (ن) من الأزواج المرتبة للمشاهدات (س$_{١}$، ص$_{١}$)، ... ، (س$_{ن}$، ص$_{ن}$) للمتغيرين س، ص واستخدمنا المحور الأفقي ليمثل المتغير (س) والمحور الرأسي ليمثل المتغير (ص) فإن رصد أزواج المشاهدات على هذين المحورين يعطي العديد من أشكال الانتشار نذكر منها ما يلي:



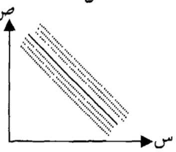
شكل (١-أ)



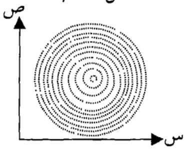
شكل (١-ب)



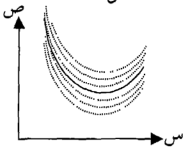
شكل (١-حـ)



شكل (١-د)



شكل (١-هـ)



شكل (١-و)

فنلاحظ بأن الشكل (١-ب) يبين أن الزيادة في أحد المتغيرين تصاحبها زيادة في المتغير الآخر وأن النقص في أحدهما يصاحبه نقص في الآخر. ومثل هذه العلاقة توصف بأنها علاقة طردية (موجبة) ومن ناحية أخرى فإن شكل (١-د) يبين أن الزيادة في أحد المتغيرين يصاحبها نقص في المتغير الآخر حيث أن العلاقة توصف بينهما بأنها علاقة عكسية (سالبة). والجدير بالذكر أن قوة العلاقة بين المتغيرين س، ص تزداد كلما زاد عدد النقط التي تقع على الخط الذي يمثل هذه العلاقة بينما تقل قوتها كلما قل عدد النقط التي تقع على الخط فإذا وقعت جميع أزواج المشاهدات

على نفس الخط توصف العلاقة بأنها علاقة تامة حيث يمكن تمثيلها بمعادلـة رياضيـة. فالشكل(١-أ) يبين أن العلاقة بين س، ص علاقة خطية (موجبة) تامـة بينمـا شـكل (١-حـ) يبين وجود علاقة خطية عكسية (سالبة) تامة.

والأشكال الأربعة الأولى تبين أن العلاقة بـين المتغـيرين س، ص خطيـة بينمـا الشكل (١-و) يعتبر أحد الأمثلة لوجـود علاقـة غـير خطيـة (مـن الدرجـة الثانيـة) بينهما. أما شكل (١-هـ) فيدل على عدم وجود أي علاقة بين س، ص حيـث تنتشـر النقط بطريقة عشوائية تقريباً.

وكما سبق وأن ذكرنا فإن أشكال الانتشار يعطي فكرة مبدئية عن شكل ودرجة قوة العلاقة (إن وجدت) بين المتغيرين. س، ص فإذا تبين من شـكل الانتشـار وجـود علاقة بينهما فإن قياس درجة قوتها رقمياً تتـم عـن طريـق حسـاب معـامل الارتبـاط المناسب لنوعية البيانات المتاحة من هذيـن المتغـيرين. وفيمـا يلـي نسـتعرض بعـض مقاييس الارتباط للبيانات الكمية والوصفية.

(٥-٢) معامل الارتباط بيرسون: (Pearson's Correlation Coefficient):

تعريف: ليكن لدينا مجموعة من أزواج المشاهدات (س١، ص١)، ....، (سن، صن) فـإن معامل الارتباط بيرسون يعطى بإحدى الصيغ التالية:

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{و}} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_{\text{و}} - \bar{\text{ص}})}{\text{ن}\,\sigma_{\text{س}} . \sigma_{\text{ص}}} \quad \text{.................... (١)}$$

حيث ن: عدد الأزواج المرتبة.

$\sigma_{\text{س}}$: الانحراف المعياري للمتغير س.

$\sigma_{\text{ص}}$: الانحراف المعياري للمتغير ص.

$$\text{أو ر} = \frac{\text{ن}\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}}\text{ص}_{\text{و}} - \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{و}}}{\sqrt{\left(\text{ن}\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}}^{2} - \left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}}\right)^{2}\right)\left(\text{ن}\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{و}}^{2} - \left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{و}}\right)^{2}\right)}} \quad \text{............ (٢)}$$

$$\text{أو ر} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}}\text{ص}_{\text{و}} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sqrt{\left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{و}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}^{2}\right)\left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{و}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{ص}}^{2}\right)}} \quad \text{.......................} \quad (٣)$$

$$\text{أو ر} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \left(\text{س}_{\text{و}} - \overline{\text{س}}\right)\left(\text{ص}_{\text{و}} - \overline{\text{ص}}\right)}{\sqrt{\left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \left(\text{س}_{\text{و}} - \overline{\text{س}}\right)^{2}\right)\left(\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \left(\text{ص}_{\text{و}} - \overline{\text{ص}}\right)^{2}\right)}} \quad \text{.......................} \quad (٤)$$

خواص معامل الارتباط:

١- يعتبر معامل الارتباط (ر) قيمة مجردة لا تتأثر بوحدة المتغيرات.

٢- تتراوح قيمة (ر) بين -١، ١ أي أن -١ ≤ ر ≤ ١.

٣- إذا كانت ر = ١ فيقال بأن هنالك ارتباط طردي (موجب) تام.

٤- إذا كانت ر = -١ فيقال بأن هنالك ارتباط عكسي (سالب) تام.

٥- إذا كانت قيمة ر تتراوح بين الصفر والواحد فإنه يقال أن هنالك ارتباط طردي يكون ضعيفاً كلما كانت قيمة (ر) قريبة من الصفر وتزداد قوة العلاقة كلما اقتربنا من الواحد.

٦- إذا كانت قيمة ر تتراوح بين -١، والصفر فيقال بأن هنالك ارتباط عكسي يكون قوياً كلما كانت قيمة ر قريبة من -١ وتضعف كلما اقتربت من الصفر.

٧- إذا كانت ر=صفر فلا يوجد علاقة خطية بين المتغيرين.

مثال (١): الجدول التالي يبين علامات عشرة طلاب في مبحثي الرياضيات والإحصاء. المطلوب احسب معامل الارتباط بيرسون.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
الرياضيات (س)	٦٧	٨٤	٧٥	٩١	٩٢	٩٦	٩٠	٥١	٦٠	٥٤	٧٦٠
الإحصاء (ص)	٧٣	٧٤	٧٨	٨٦	٩٠	٩٨	٩٤	٦٥	٥٥	٦٧	٧٨٠

الحل: $\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٧٦٠}{١٠} = ٧٦$ ؛ $\overline{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{٧٨٠}{١٠} = ٧٨$

رقم الطالب	س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^٢$	$(ص - \bar{ص})^٢$
١	٦٧	٧٣	-٩	-٥	٤٥	٨١	٢٥
٢	٨٤	٧٤	٨	-٤	-٣٢	٦٤	١٦
٣	٧٥	٧٨	-١	صفر	صفر	١	∴
٤	٩١	٨٦	١٥	٨	١٢٠	٢٢٥	٦٤
٥	٩٢	٩٠	١٦	١٢	١٩٢	٢٥٦	١٤٤
٦	٩٦	٩٨	٢٠	٢٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠
٧	٩٠	٩٤	١٤	١٦	٢٢٤	١٩٦	٢٥٦
٨	٥١	٦٥	-٢٥	-١٣	٣٢٥	٦٢٥	١٦٩
٩	٦٠	٥٥	-١٦	-٢٣	٣٦٨	٢٥٦	٥٢٩
١٠	٥٤	٦٧	-٢٢	-١١	٢٤٢	٤٨٤	١٢١
المجموع	٧٦٠	٧٨٠	صفر	صفر	١٨٨٤	٢٥٨٨	١٧٣٤

$$\therefore ر = \frac{١}{ن} \cdot \frac{\sum(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sigma_س . \sigma_ص} = \frac{١}{١٠} \times \frac{١٨٨٤}{\sqrt{\frac{٢٥٨٨}{١٠} \times \frac{١٧٣٤}{١٠}}}$$

$$= \frac{١٨٨٤}{\sqrt{٢٥٨٨ \times ١٧٣٤}} = ٠{,}٨٩١٩$$

مثال (٢): إليك المعطيات التالية:

ن = ١٠، $\sum$س = ١٦٠، $\sum$ص = ١٩٠، $\sum$س^٢ = ٤٩٦٠، $\sum$ص^٢ = ٧٦١٠،

$\sum$س ص = ٤٠٠٠. احسب معامل الارتباط بيرسون .

الحل:

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{\left(ن \sum س^٢ - \left(\sum س\right)^٢\right)\left(ن \sum ص^٢ - \left(\sum ص\right)^٢\right)}}$$

$$ر = \frac{(١٠)(٤٠٠٠) - (١٦٠)(١٩٠)}{\sqrt{[١٠ \times ٤٩٦٠ - ١٦٠ \times ١٦٠][١٠ \times ٧٦١٠ - ١٩٠ \times ١٩٠]}}$$

$$= \frac{٤٠٠٠٠ - ٣٠٤٠٠}{\sqrt{(٢٤٠٠٠)(٤٠٠٠٠)}} = \frac{٩٦٠٠}{\sqrt{٩٦٠٠٠٠٠٠٠}} = ٠,٣٠٩٨$$

(٣-٥) أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط:

تعريف: ليكن لدينا أزواج المشاهدات التالية ($س_١$، $ص_١$)، .... ، ($س_ن$، $ص_ن$) وأجرينا التحويلات التالية:

س* = أ س + ب

ص* = حـ ص + د

حيث أ، ب، حـ د أعداد حقيقية، (س، ص) زوج المشاهدات قبل التحويل، (س*، ص*) زوج المشاهدات بعد التحويل.

فإن: (١) معامل الارتباط بعد التحويل = ر (س*، ص*).

= ر (س، ص) إذا كانت أ. حـ > صفر.

أي أن معامل الارتباط يبقى كما هو إذا كانت أ و حـ لهما نفس الإشارة.

(٢) معامل الارتباط بعد التحويل = ر (س*، ص*)

= −ر (س، ص) إذا كانت أ. حـ < صفر.

أي أن معامل الارتباط تتغير إشارته فقط إذا كان أ و حـ مختلفتان في الإشارة.

مثال (٣): حُسب معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص فوجد بأنه يساوي (٠,٧) وأجرينا التحويلات التالية:

س* = ٠,٣ س + ٦، ص* = −٠,٧ ص + ١١

أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س*، ص*.

الحل: حسب النظرية، بما أن أ = ٠,٣، = −٠,٧.

فإن أ. حـ = −٠,٢١ < صفر وهذا يعني بأن معامل الارتباط بين س*، ص* يساوي − ر (س، ص) = −٠,٧.

مثال (٤): أوجد معامل الارتباط بيرسون للبيانات التالية:

(س): ٦٠، ٦٠، ٦٠، ٦٢، ٦٢، ٦٢، ٦٤، ٦٤، ٦٨، ٦٨

(ص): ١٣٠، ١٢٥، ١٣٥، ١٤٠، ١٦٠، ١٦٥، ١٧٠، ١٥٥، ١٥٠، ١٥٠.

الحل: سنجري التحويلات التالية على المتغيرين (س، ص) قبل حساب معامل الارتباط:

$$\text{س}^* = \frac{\text{س} - 64}{2}\text{، } \text{ص}^* = \frac{\text{ص} - 140}{5}.$$

س	ص	س*	ص*	س*ص*	س*²	ص*²
٦٠	١٣٠	٢-	٢-	٤	٤	٤
٦٠	١٢٥	٢-	٣-	٦	٤	٩
٦٠	١٣٥	٢-	١-	٢	٤	١
٦٢	١٤٠	١-	٠	صفر	١	صفر
٦٢	١٦٠	١-	٤	٤-	١	١٦
٦٢	١٦٥	١-	٥	٥-	١	٢٥
٦٤	١٧٠	٠	6	صفر	صفر	٣٦
٦٤	١٥٥	٠	3	صفر	صفر	٩
٦٨	١٥٠	٢	٢	٤	٤	٤
٦٨	١٥٠	٢	٢	٤	٤	٤
المجموع		٥-	١٦	١١	٢٣	١٠٨

الآن: بما أن معامل س موجب ومعامل ص موجب فإن معامل الارتباط بين س، ص يساوي معامل الارتباط بين س*، ص* وعندئذ:

$$\text{ر}(\text{س،ص}) = \text{ر}(\text{س}^*\text{، ص}^*) = \frac{\text{ن}\sum \text{س}^*\text{ص}^* - \sum \text{س}^* . \sum \text{ص}^*}{\sqrt{\left[\text{ن}\sum \text{س}^{*2} - \left(\sum \text{س}^*\right)^2\right]\left[\text{ن}\sum \text{ص}^{*2} - \left(\sum \text{ص}^*\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{10 \times 11 - {}^{-}5 \times 16}{\sqrt{(10 \times 23 - {}^{-}5 \times {}^{-}5)\ (10 \times 108 - 16 \times 16)}} = \frac{190}{\sqrt{205 \times 824}} = 0{,}1461$$

(٥-٤) معامل الارتباط للرتب: (Coefficient Of Rank Correlation):

في كثير من الأحيان يصعب قياس متغير ما رقمياً ولكنه يسهل تعيين رتب للصفة أو الخاصية المراد دراستها عن هذا المتغير فمثلاً إذا كانت لدينا تقادير خمسة طلاب في مبحث ما فإنه من السهل ترتيب هذه التقادير من الأعلى للأسفل أو العكس وينطبق هذا التحليل على كثير من المسائل في علم الاقتصاد والإدارة والتربية وغيرها.

فإذا كان لدينا مجموعة من الأفراد وأعطينا رتب هؤلاء الأفراد من حيث النظر إلى صفتين معينتين لكل فرد أو الحكم على صفة من قبل حكمين اثنين أو ما شابه ذلك فإنه يتعذر علينا معرفة العلاقة بين الصفتين أو بين حكم الحكمين باستعمال معامل الارتباط بيرسون لعدم توافر البيانات العددية عن أفراد المجموعة ولكنه يمكن استعمال مقياس آخر لمعرفة مقدار الارتباط بين الصفتين والذي يسمى معامل الارتباط للرتب ومن أهم معاملات الارتباط للرتب:

معامل الارتباط سبيرمان: (Spearman's Coefficient of Rank Correlation)

يعطى معامل الارتباط سبيرمان بالقانون التالي:

$$ر_{س} = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

حيث: ن: عدد أزواج المشاهدات (س، ص).

ف: الفرق بين الرتب للمتغيرين.

مثال (٥): احسب معامل الارتباط سبيرمان للجدول التالي:

رتبة س	١	٢	٤	٣	٥
رتبة ص	٣	١	٥	٢	٤

الحل:

رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س - رتبة ص	$ف^2$
١	٣	١ - ٣ = -٢	٤
٢	١	٢ - ١ = ١	١
٤	٥	٤ - ٥ = -١	١
٣	٢	٣ - ٢ = ١	١
٥	٤	٥ - ٤ = ١	١
المجموع			٨

$$ر_س = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٨}{٥(٢٥ - ١)} = ١ - \frac{٤٨}{١٢٠}$$

$$= ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥} = ٠,٦$$

مثال (٦): الجدول التالي يبين تقادير ثمانية طلاب في مبحثين مختلفين.

المطلوب: احسب معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
التقدير في المبحث (س)	ممتاز	جيد جداً	جيد	ضعيف	متوسط	جيد	ممتاز	جيد
التقدير في المبحث (ص)	جيد جداً	ممتاز	جيد	متوسط	متوسط	جيد جداً	ممتاز	متوسط

الحل:

رقم الطالب	تقدير (س)	تقدير (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف^٢
١	ممتاز	جيد جداً	١,٥	٣,٥	-٢	٤
٢	جيد جداً	ممتاز	٣	١,٥	١,٥	٢,٢٥
٣	جيد	جيد	٥	٥	صفر	صفر
٤	ضعيف	متوسط	٨	٧	١	١
٥	متوسط	متوسط	٧	٧	صفر	صفر
٦	جيد	جيد جداً	٥	٣,٥	١,٥	٢,٢٥
٧	ممتاز	ممتاز	١,٥	١,٥	صفر	صفر
٨	جيد	متوسط	٥	٧	-٢	٤
المجموع						١٣,٥

$$\therefore ر_س = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ١٣,٥}{٨(٦٤ - ١)} = ١ - \frac{٨١}{٥٠٤}$$

$$= \frac{٤٢٣}{٥٠٤} = ٠,٨٣٩$$

ونلاحظ في هذا المثـال بـأن التقديـر ممتـاز للمتغيـر س قـد تكـرر مرتـين وأن التقدير (جيد) قد تكرر ثلاث مرات وفي مثـل هـذه الأحـوال تكـون رتـب التقـادير متساوية وتساوي متوسط الرتب المتتالية لها، فمثلاً للمتغير س فإن رتب التقدير ممتاز هي ١، ٢ ومتوسط هذه الرتب يساوي $\frac{١+٢}{٢}$ = ١,٥ وبالتـالي فقـد أعطينـا الرتبـة ١,٥ للتقدير ممتاز وبالنسبة لرتب التقدير (جيد) فهي ٤، ٥، ٦ ومتوسط هذه الرتب يساوي $\frac{٤+٥+٦}{٣} = \frac{١٥}{٣}$ = ٥ ونلاحظ أننا أعطينا التقدير جيـد الرتبـة ٥ وهـذا مـا طبقنـاه في جميع الأحوال أينما تكرر التقدير.

مثال (٧): البيانات التالية توضح درجات الذكاء (س) ودرجات مستوى إجادة القـراءة (ص) لعشرة أفراد. احسب معامل الارتباط سبيرمان.

س	٢٩٧	٢١٦	١٣٣	٢٢٦	١١٧	٢٣٢	١٧٢	٢٠٧	١٥٠	٢٠٠
ص	٤٢	٤٦	٢٧	٢٤	٢٣	٤٠	٢٥	٢٩	٢٤	٤٣

الحل:

س	ص	رتبة س	رتبة ص	ف	ف^{٢}
٢٩٧	٤٢	١	٣	-٢	٤
٢١٦	٤٦	٤	١	٣	٩
١٣٣	٢٧	٩	٦	٣	٩
٢٢٦	٢٤	٣	٨,٥	٥,٥	٣٠,٢٥
١١٧	٢٣	١٠	١٠	صفر	صفر
٢٣٢	٤٠	٢	٤	-٢	٤
١٧٢	٢٥	٧	٧	صفر	صفر
٢٠٧	٢٩	٥	٥	صفر	صفر
١٥٠	٢٤	٨	٨,٥	-٠,٥	٠,٢٥
٢٠٠	٤٣	٦	٢	٤	١٦
المجموع					٧٢,٥

$$\therefore \ r_s = 1 - \frac{6\sum f^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times 72.5}{10\times(100-1)} = 1 - \frac{435}{10\times 99}$$

$$= 1 - \frac{435}{990} = \frac{37}{66} = 0.56$$

(٥-٥) تحليل الانحدار (Regression Analysis):

يعتبر تحليل الانحدار أحد الأساليب الإحصائية الهامة التي تستخدم في العديد من مجالات العلوم المختلفة، وتهدف دراسة الانحدار إلى تقدير معالم (مجاهيل) المعادلة الرياضية التي تعبّر عن العلاقة السببية بين المتغيرات. ويجب التنويه بأن دراستنا ستقتصر على دراسة العلاقة بين المتغيرين (س، ص) عندما تكون هذه العلاقة خطية. ومن الأمثلة الشائعة التي يمثلها خط مستقيم في علم الاقتصاد هي العلاقة بين الدخل والاستهلاك حيث يعتبر الخط المستقيم في معظم الأحوال تقريباً جيداً لمنحنى الدخل والاستهلاك. ففي هذه العلاقة يكون المتغير التابع (ص) هو الاستهلاك من سلعة معينة ويكون المتغير المستقل هو الدخل المتاح للإنفاق.

وهذه العلاقة يمثلها الخط: ص = أ س + ب .... (١)

حيث أ، ب يمثلان معلمتي المعادلة (المجاهيل) المراد تقديرهما وذلك باستخدام بيانات معلومة عن (س، ص) ويطلق على هذه المعادلة (خط انحدار ص على س) وتكتب عادة خط انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$. من الناحية العملية فإن المعادلة (١) لا تعبّر عن الظواهر السلوكية والطبيعية فمثلاً في حالة خط الدخل والاستهلاك نجد بأن المتغير التابع هو الكمية المستهلكة من سلعة ما. والمتغير المستقل هو الدخل المتاح للإنفاق. وهنا يطرح التساؤل التالي هل الدخل كمتغير مستقل هو العامل الوحيد الذي يؤثر على الكمية المستهلكة من سلعة ما؟ وبالطبع الإجابة على هذا السؤال بالنفي. لأن هنالك عوامل أخرى تؤثر على الكمية المستهلكة نذكر منها العمر، الجنس، الأذواق ... الخ. وبعض هذه العوامل يصعب قياسها أو يصعب الحصول على معلومات منها. وللتغلب على هذه العقبات من حيث عدم إمكانية تمثيل هذه العوامل المختلفة المؤثرة على المتغير التابع في العلاقة. فإننا سنستخدم متغيراً عشوائياً ويقوم بدور مجمع الأثر لكل هذه العوامل. فإذا رمزنا لهذا المتغير بالرمز (خ) وبالتالي فإن المعادلة (١) يمكن كتابتها على النحو التالي:

ص = أ س + ب + خ .... (٢)

وحل المعادلة (٢) يعتمد على عدد من أزواج القيم المشاهدة للاستهلاك (ص) والدخل (س) فإذا كان الدخل فقط هو العامل الوحيد والمؤثر الذي يفسر الاستهلاك ١٠٠٪ والذي يحكم سلوك المستهلك تماماً، فإننا نجد أن أي زوجين من قيم (س، ص) سوف تمكننا من تقدير قيمة وحيدة لكل من أ، ب أي أن جميع المشاهدات (س، ص) سوف تقع على خط مستقيم وبالتالي تكون قيمة خ = صفر.

وباستخدام عدد من أزواج القيم المشاهدة (س، ص) يتم تقدير أ، ب لتحديد هذا الخط المستقيم النظري بحيث يقل تأثير الخطأ العشوائي بأكبر قدر ممكن.

وبما أن قيمة خ لكل زوج من أزواج المشاهدات قد تكون موجبة (القيمة النظرية أقل من المشاهدة) أو سالبة (القيمة النظرية أكبر من المشاهدة) فإن محصلة هذا المتغير سوف لا تعبر فعلاً عن مدى انتشار النقط الفعلية حول الخط الممثل لهذه البيانات. وأحد الوسائل المتبعة هو محاولة جعل مجموع مربعات قيم هذا الخطأ أقل ما يمكن.

وتهدف طريقة المربعات الصغرى إلى تقدير قيم أ، ب باستخدام عدد من أزواج القيم (س، ص) بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء ($\sum$خ^2) أقل ما يمكن.

طريقة المربعات الصغرى: (Least Squares Method):

لنفترض بأن لدينا أزواج المشاهدات (س$_1$، ص$_1$)، .... ، (س$_ن$، ص$_ن$) والتي تحقق المعادلة: ص$_ر$ = أ س$_ر$ + ب + خ$_ر$ .... (٣).

حيث ر = ١، ٢، .... ، ن.

وهذه المعادلة هي معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

وبالتالي: خ$_ر$ = ص$_ر$ − أ س$_ر$ − ب .... (٤).

وبتربيع طرفي المعادلة (٤) ينتج:

خ$^2_ر$ = (ص$_ر$ − أ س$_ر$ − ب)^2 .... (٥).

وبأخذ المجموع للطرفين:

$\sum_{ر=1}^{ن}$خ$^2_ر$ = $\sum_{ر=1}^{ن}$(ص$_ر$ − أ س$_ر$ − ب)^2 .... (٦).

والمطلوب إيجاد قيمة أ، ب بحيث يكون $\sum_{ر=1}^{ن} خ_{ر}^{2}$ أقل ما يمكن.

الآن، باستعمال أسلوب التفاضل الجزئي يمكن إيجاد قيم أ، ب التي تحقق النهاية الصغرى لمجموع مربعات الأخطاء.

دعنا نرمز للطرف الأيمن في المعادلة (٦). بالرمز (ك) فإن المشتقات الجزئية بالنسبة إلى (أ، ب) على التوالي هي:

$$\frac{\partial ك}{\partial أ} = ٢\sum_{ر=1}^{ن} (ص_{ر} - أس_{ر} - ب) \times (-س_{ر}) \quad ....\ (٧)$$

$$\frac{\partial ك}{\partial ب} = ٢\sum_{ر=1}^{ن} (ص_{ر} - أس_{ر} - ب) \times (-١) \quad ....\ (٨)$$

ولإيجاد النهايات الصغرى نساوي المشتقات الجزئية بالصفر لنجد أن:

$$-٢ \sum_{ر=1}^{ن} (ص_{ر} - أس_{ر} - ب) \times (س_{ر}) = \text{صفر} \quad ......\ (٩)$$

$$-٢ \sum_{ر=1}^{ن} (ص_{ر} - أس_{ر} - ب) = \text{صفر} \quad ......\ (١٠)$$

وبقسمة المعادلة (٩) & (١٠) على (−٢) وبفك الأقواس وترتيب الحدود ينتج أن:

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}\, ص_{ر} = أ \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}^{٢} + ب \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} \quad ....\ (١١)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ص_{ر} = أ \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} + ن\, ب \quad ....\ (١٢)$$

الآن بضرب المعادلة (١١) بـ ن والمعادلة (١٢) بـ $\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}$ ينتج:

$$ن \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}\, ص_{ر} = ن\, أ \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}^{٢} + ن\, ب \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} \quad ....\ (١٣)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} \sum_{ر=1}^{ن} ص_{ر} = أ \left(\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر}\right)^{٢} + ن\, ب \sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} \quad ....\ (١٤)$$

وبضرب المعادلة (١٤) بـ (−١) وجمعها مع المعادلة (١٣) ينتج:

$$ن\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر = ن أ \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - أ\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2 \quad ....\ (15)$$

وعندئذ فإن:

$$\boxed{أ = \frac{ن\sum_{ر=1}^{ن} س_ر.ص_ر - \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}} \quad ....\ (16)$$

$$\boxed{ب = \overline{ص} - أ\overline{س}} \quad ....\ (17)$$

كذلك فإن هنالك عدة صيغ لإيجاد أ نذكر منها:

$$أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})^2} \quad ....\ (18)$$

$$\text{أو}\quad أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - ن\overline{س}\,\overline{ص}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - ن\overline{س}^2} \quad ....\ (19)$$

مثال (٨): إذا كان لدينا أزواج المشاهدات الآتية (س، ص) وكانت العلاقة بينهما يمكن أن يمثلها خطاً مستقيماً والمطلوب تقدير خط الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

(س): ١٠، ١٢، ١٦، ١٤، ١٨، ٢٠.

(ص): ٦، ١٢، ١٢، ٨، ١٦، ١٨.

الحل: معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: ص = أ س + ب

ولإيجاد قيمة أ، ب ستكون جدول الحل:

س	ص	$س^2$	س ص	$ص^2$
١٠	٦	١٠٠	٦٠	٣٦
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٦	١٢	٢٥٦	١٩٢	١٤٤
١٤	٨	١٩٦	١١٢	٦٤
١٨	١٦	٣٢٤	٢٨٨	٢٥٦
٢٠	١٨	٤٠٠	٣٦٠	٣٢٤
٩٠	٧٢	١٤٢٠	١١٥٦	٩٦٨

وباستعمال المعادلتين (١٦) & (١٧) يمكن إيجاد قيمتي أ، ب.

$$\text{أ} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} = \frac{٦ \times ١١٥٦ - ٩٠ \times ٧٢}{٦ \times ١٤٢٠ - ٩٠ \times ٩٠} = \frac{٦٩٣٦ - ٦٤٨٠}{٨٥٢٠ - ٨١٠٠}$$

$$= \frac{٤٥٦}{٤٢٠} = ١,٠٨٦$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \times \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٧٢}{٦} - ١,٠٨٦ \times \frac{٩٠}{٦}$$

$$= ١٢ - ١,٠٨٦ \times ١٥ = -٤,٢٩$$

∴ معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: ص = ١,٠٨٦ س − ٤,٢٩.

خط انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ **:**

إذا كانت س تمثل المتغير التابع، ص تمثل المتغير المستقل فإن معادلة انحـدار س على ص يمكن كتابتها على النحو التالي:

س = م ص + حـ + خ .... (٢٠)

ويمكن إيجاد قيمتي م، حـ بنفس الأسلوب الذي اتبع في إيجاد أ، ب وبالتالي فإن:

$$\boxed{\text{م} = \frac{\text{ن}\sum \text{س}_{\text{ر}}\text{ص}_{\text{ر}} - \sum \text{س}_{\text{ر}} \sum \text{ص}_{\text{ر}}}{\text{ن}\sum \text{ص}_{\text{ر}}^{٢} - \left(\sum \text{ص}_{\text{ر}}\right)^{٢}}} \quad .... (٢١)$$

$$\boxed{\text{حـ} = \overline{\text{س}} - \text{م}\,\overline{\text{ص}}} \quad \text{.................................} \quad (\text{٢٢})$$

كذلك فإن هنالك عدة صيغ لإيجاد م نذكر منها:

$$\text{م} = \frac{\sum (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})}{\sum (\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})^{\text{٢}}} \quad \text{.........................} \quad (\text{٢٣})$$

$$\text{م} = \frac{\sum \text{س}_\text{ر}\,\text{ص}_\text{ر} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sum \text{ص}_\text{ر}^{\text{٢}} - \text{ن}\,\overline{\text{ص}}^{\text{٢}}} \quad \text{.........................} \quad (\text{٢٤})$$

مثال (٩): بالاستفادة من البيانات الواردة والجدول المكـوّن في المثـال رقـم (٨) أوجـد معادلة انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.

الحل: معادلة انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ هي : س = م ص + حـ

$$\text{م} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{ص}^{\text{٢}} - \left(\sum \text{ص}\right)^{\text{٢}}} = \frac{\text{٦} \times \text{١١٥٦} - \text{٩٠} \times \text{٧٢}}{\text{٦} \times \text{٩٦٨} - \text{٧٢} \times \text{٧٢}}$$

$$= \frac{\text{٦٩٣٦} - \text{٦٤٨٠}}{\text{٥٨٠٨} - \text{٥١٨٤}} = \frac{\text{٤٥٦}}{\text{٦٢٤}} = \text{٠,٧٣}$$

$$\text{حـ} = \overline{\text{س}} - \text{م}\,\overline{\text{ص}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} - \text{م} \times \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{\text{٩٠}}{\text{٦}} - \text{٠,٧٣} \times \frac{\text{٧٢}}{\text{٦}}$$

$$= \text{١٥} - \text{٠,٧٣} \times \text{١٢} = \text{٦,٢٤}.$$

∴ معادلة انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ هي : س = ٠,٧٣ ص + ٦,٢٤.

والنقطة التي يجب إيضاحها هي التفرقة بين خطي انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$، انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ فلقد ذكرنا سابقاً أن هناك متغيرين أحدهما مستقل والآخر تـابع. ووجدنـا أن علاقـة

مثل الدخل والاستهلاك يكون المتغير التابع (ص) هو الكمية المستهلكة من سلعة معينة والمتغير المستقل (س) هو الدخل وذلك استيفاء النظرية الاقتصادية.

والسؤال الذي نطرحه الآن: هل تقبل النظرية الاقتصادية أن نعكس الوضع ونجعل المتغير التابع (ص) متغيراً مستقلاً و (س) متغيراً تابعاً. والإجابة على هذا التساؤل بالنفي طبعاً حيث أن هذا الأمر لا يعبر عن علاقة الدخل بالاستهلاك. ولكن قد يتساءل البعض لماذا يوجد خطي انحدار لنفس أزواج القيم، والإجابة على هذا التساؤل تتلخص أن هنالك حالات يكون فيها س، ص متغيرين التغير في أي منهما يفسر التغير في الآخر، وبالتالي فوجود خطي انحدار ليس خطأً إذا استخدما في وضعهما الصحيح من الناحية العملية.

(٦-٥) العلاقة بين معامل الارتباط بيرسون وبين معاملات الانحدار:

حيث أن كلاً من الارتباط والانحدار يهدفان إلى التعرف على العلاقة بين المتغيرين س، ص فإنه من المتوقع وجود علاقة بينهما تمكننا من الحصول على قيمة أحدهما بمعلومية قيمة الآخر. فإذا كان أ هو معامل خط انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$، م معامل خط انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$، $\sigma_{س}$ الانحراف المعياري للمتغير س، $\sigma_{ص}$ الانحراف المعياري للمتغير ص فإن:

$$ر = \text{معامل الارتباط} = \sqrt{أ \times م} \quad ....\ (٢٥)$$

وتتحدد إشارة ر تبعاً لإشارة أ، م ومن الجدير بالذكر بأن أ، م لهما نفس الإشارة.

$$ر = أ \times \left(\frac{\sigma_{س}}{\sigma_{ص}}\right) \quad ....\ (٢٦)$$

$$ر = م \times \left(\frac{\sigma_{ص}}{\sigma_{س}}\right) \quad ....\ (٢٧)$$

كذلك فإن معادلتي خطي الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$، $\left(\frac{س}{ص}\right)$ يتقاطعان في النقطة $(\bar{س}، \bar{ص})$.

مثال (١٠): إذا كانت لديك البيانات التالية:

$\sum س = ٦٤$، $\sum ص = ٦٤٠$، $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٧٢٠$

$\sum (س - \bar{س})^٢ = ١٢٠$، $\sum (ص - \bar{ص})^٢ = ٥٠٠٠$، ن = ٨.

المطلوب: إيجاد:

١- معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ ٢- معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$.

٣- معامل الارتباط بيرسون.

الحل:

(١) معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي ص = أ س + ب.

$$حيث\ أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}} = \frac{٧٢٠}{١٢٠} = ٦$$

$$ب = \overline{ص} - أ\ \overline{س} = \frac{٦٤٠}{٨} - ٦ \times \frac{٦٤}{٨} = ٨٠ - ٤٨ = ٣٢$$

∴ معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: ص = ٦ س + ٣٢.

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هي س = م ص + حـ

$$م = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (ص - \overline{ص})^{٢}} = \frac{٧٢٠}{٥٠٠٠} = \frac{٧٢}{٥٠٠} = ٠{,}١٤٤$$

$$حـ = \overline{س} - م\ \overline{ص} = ٨ - ٠{,}١٤٤ \times ٨٠ = ٨ - ١١{,}٥٢ = -٣{,}٥٢$$

∴ معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هي س = ٠,١٤٤ ص - ٣,٥٢

(٣) $ر = \sqrt{أ \times م} = \sqrt{٦ \times ٠{,}١٤٤} = ٠{,}٩٣$

مثال (١١): إذا كانت معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٢,٥ ومعادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هي: س = $-\frac{٣}{٢}$ ص + ١.

وكانت $\sigma_{س}$ = ١٢ أوجد قيمة كلاً من $\overline{ص}$، $\overline{س}$، $\sigma_{ص}$، معامل الارتباط بيرسون.

الحل: معامل الارتباط بيرسون = ر = $-\sqrt{أ \times م} = -\sqrt{\frac{-١}{٢} \times \frac{-٣}{٢}}$

$$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٠٫٨٧$$

بما أن معادلتي خطي الانحدار يتقاطعان في الأوساط الحسابية فإنه بحل المعــادلتين آنياً نحصل على $\bar{\text{س}}$ ، $\bar{\text{ص}}$.

$$\bar{\text{ص}} = \frac{-١}{٢}\bar{\text{س}} + ٢٫٥ \quad .... \quad (١)$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{-٣}{٢}\bar{\text{ص}} + ١ \quad .... \quad (٢)$$

بالتعويض بدل ($\bar{\text{س}}$) من المعادلة (٢) في المعادلة (١) ينتج:

$$\bar{\text{ص}} = \frac{-١}{٢}\left(\frac{-٣}{٢}\bar{\text{ص}} + ١\right) + ٢٫٥$$

$$\Leftarrow \bar{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}\bar{\text{ص}} - \frac{١}{٢} + ٢.٥ \Leftarrow \bar{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}\bar{\text{ص}} + ٢$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤}\bar{\text{ص}} = ٢ \Leftarrow \bar{\text{ص}} = ٨ \quad .... \quad (٣)$$

الآن بتعويض المعادلة (٣) في (٢) ينتج:

$$\bar{\text{س}} = \frac{-٣}{٢} \times ٨ + ١ = -١١$$

وكذلك بما أن:

$$ر = \frac{\sigma_{\text{س}}}{\sigma_{\text{ص}}} \times أ \Leftarrow -٠٫٨٧ = \frac{١٢}{\sigma_{\text{ص}}} \times \frac{-١}{٢}$$

$$\Leftarrow \sigma_{\text{ص}} = \frac{٦}{٠٫٨٧} = ٦٫٩.$$

(٥-٧) مسائل محلولة:

مسألة(١): الجدول التالي يبين أطوال وأوزان (١٢) شخص

س	١٧١	١٨٣	١٥٦	١٦٥	١٦٧	١٦٨	١٧٦	١٧٤	١٨٠	٢٠٠	٢١٠	١٧٣
ص	٧٥	٨٠	٦١	٦٤	٦٧	٧٠	٨٠	٨٤	٩٠	١٠٠	٩٥	٧٣

أوجد ما يلي:

(١) معامل الارتباط بيرسون.　　(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(٣) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.　　(٤) ارسم شكل الانتشار.

(٥) ارسم خطي الانحدار.

الحل:

	س	ص	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
	١٧١	٧٥	١٢٨٢٥	٢٩٢٤١	٥٦٢٥
	١٨٣	٨٠	١٤٦٤٠	٣٣٤٨٩	٦٤٠٠
	١٥٦	٦١	٩٥١٦	٢٤٣٣٦	٣٧٢١
	١٦٥	٦٤	١٠٥٦٠	٢٧٢٢٥	٤٠٩٦
	١٦٧	٦٧	١١١٨٩	٢٧٨٨٩	٤٤٨٩
	١٦٨	٧٠	١١٧٦٠	٢٨٢٢٤	٤٩٠٠
	١٧٦	٨٠	١٤٠٨٠	٣٠٩٧٦	٦٤٠٠
	١٧٤	٨٤	١٤٦١٦	٣٠٢٧٦	٧٠٥٦
	١٨٠	٩٠	١٦٢٠٠	٣٢٤٠٠	٨١٠٠
	٢٠٠	١٠٠	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠
	٢١٠	٩٥	١٩٩٥٠	٤٤١٠٠	٩٠٢٥
	١٧٣	٧٣	١٢٦٢٩	٢٩٩٢٩	٥٣٢٩
المجموع	٢١٢٣	٩٣٩	١٦٧٩٦٥	٣٧٨٠٨٥	٧٥١٤١

$$(١)\ \text{ر} = \frac{\text{ن}\sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\sqrt{\left[\text{ن}\sum \text{س}^{٢} - \left(\sum \text{س}\right)^{٢}\right]\left[\text{ن}\sum \text{ص}^{٢} - \left(\sum \text{ص}\right)^{٢}\right]}}$$

$$\text{ر} = \frac{١٢ \times ١٦٧٩٦٥ - ٢١٢٣ \times ٩٣٩}{\sqrt{\left[١٢ \times ٣٧٨٠٨٥ - (٢١٢٣)^{٢}\right]\left[١٢ \times ٧٥١٤١ - (٩٣٩)^{٢}\right]}}$$

$$= \frac{٢٢٠٨٣}{\sqrt{٢٩٨٩١ \times ١٩٩٧١}} = ٠,٩٠٣٨$$

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: ص = أ س + ب

$$أ = \frac{ن\sum س ص - \sum س \sum ص}{ن\sum س^{٢} - \left(\sum س\right)^{٢}} = \frac{٢٢٠٨٣}{٢٩٨٩١} = ٠,٧٣٨٨$$

$$ب = \overline{ص} - أ\overline{س} = \left(\frac{٩٣٩}{١٢}\right) - \left(٠.٧٣٨٨ \times \frac{٢١٢٣}{١٢}\right)$$

$$= -٥٢,٤٥٣$$

∴ ص = ٠,٧٣٨٨ س − ٥٢,٤٥٣

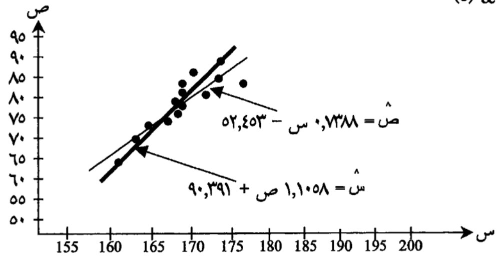
(٣) معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هي س = م ص + حـ

$$م = \frac{ن\sum س ص - \sum س \sum ص}{ن\sum ص^{٢} - \left(\sum ص\right)^{٢}} = \frac{٢٢٠٨٣}{١٩٩٧١} = ١,١٠٥٨$$

$$حـ = \overline{س} - م\overline{ص} = \left(\frac{٢١٢٣}{١٢}\right) - \left(١,١٠٥٨ \times \frac{٩٣٩}{١٢}\right) = ٩٠,٣٩١$$

∴ س = ١,١٠٥٨ ص + ٩٠,٣٩١

(٤) & (٥)



مسألة (٢): إليك الجدول التالي:

س	٣	٢	١	٥	٤
ص	٦	٨	١٠	٤	٢

(أ) أوجد معامل الارتباط بيرسون بين س، ص.

(ب) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(حـ) احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة ص إذا علمت بأن س = ٥.

الحل:

	س	ص	$\text{س} - \overline{\text{س}}$	$\text{ص} - \overline{\text{ص}}$	$(\text{س} - \overline{\text{س}})(\text{ص} - \overline{\text{ص}})$	$(\text{س} - \overline{\text{س}})^{٢}$	$(\text{ص} - \overline{\text{ص}})^{٢}$
	٣	٦	صفر	∴	∴	صفر	صفر
	٢	٨	١-	٢	٢-	١	٤
	١	١٠	٢-	٤	٨-	٤	١٦
	٥	٤	٢	٢-	٤-	٤	٤
	٤	٢	١	٤-	٤-	١	١٦
المجموع	١٥	٣٠			١٨-	١٠	٤٠

$$\overline{\text{س}} = \frac{١٥}{٥} = ٣،\quad \overline{\text{ص}} = \frac{١٠}{٥} = ٦$$

(١) $$\text{ر} = \frac{\sum (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^{٢} \sum (\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})^{٢}}} = \frac{-١٨}{\sqrt{٤٠٠}} = \frac{-١٨}{٢٠} = -٠,٩$$

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي ص = أ س + ب

$$\text{أ} = \frac{\sum (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})}{\sum (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^{٢}} = \frac{-١٨}{١٠} = -١,٨$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\,\overline{\text{س}} = ٦ - (-١,٨ \times ٣) = ٦ + ٥,٤ = ١١,٤$$

$\therefore$ ص = −١,٨ س + ١١,٤

(٣) القيمة المتنبأ بها لـ ص = $\hat{ص}$ = −١,٨ × ٥ + ١١,٤ = ٢,٤

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

= ٤ − ٢,٤ = ١,٦

مسألة (٣): إذا كانت معادلة انحدار خط الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: $\hat{ص} = \frac{١}{٢}$ س + ٧ وكان $\sum_{ر=١}^{١٠}\left(س_ر - \bar{س}\right)^٢ = ٦٤٠$، $\sum_{ر=١}^{١٠}\left(ص_ر - \bar{ص}\right)^٢ = ٢٥٠$ أوجد معامل الارتباط بيرسون بين س، ص.

الحل:

بما أن أ = $\frac{\sigma_{ص}}{\sigma_{س}}$ × ر .... (١)

نجد أولاً: $\sigma_{س}$، $\sigma_{ص}$.

$$\sigma_{س} = \sqrt{\frac{\sum\left(س_ر - \bar{س}\right)^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٦٤٠}{١٠}} = \sqrt{٦٤} = ٨$$

$$\sigma_{ص} = \sqrt{\frac{٢٥}{١٠}} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج:

$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{٨}$ × ر ⇐ ٥ ر = ٤ ⇐ ر = ٠,٨

مسألة (٤): إذا كان معامل الارتباط سبيرمان (الرتب) بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٦) وكان عدد أزواج المشاهدات يساوي (٥٠) أوجد مجموع مربعات الفروق في الرتب بين س، ص.

الحل:

باستخدام قانون معامل الارتباط سبيرمان:

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢}-١)}$$ ينتج:

$$٠,٦ = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{٥٠(٢٥٠٠-١)}$$ ينتج:

$$\Leftarrow \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{٢٤٩٩ \times ٥٠} = ٠,٤ \Leftarrow \qquad \sum \text{ف}^{٢} = \frac{٢٤٩٩ \times ٥٠ \times ٠,٤}{٦}$$

$$\therefore \sum \text{ف}^{2} = ٨٣٣٠$$

تمارين الوحدة الخامسة

س١: الجدول التالي يبين علاقات (٩) طلاب في مبحث الإحصاء وأساليب تدريس الرياضيات.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
علامة الإحصاء (س)	٨٥	٩٤	٦١	٧٥	٧٦	٧٠	٦٥	٩٠	٥٠
علامة الأساليب (ص)	٨٠	٨٥	٩٠	٧١	٨٠	٦٠	٥٥	٤٥	٦٠

المطلوب: (أ) ارسم شكل الانتشار.

(ب) أوجد معامل الارتباط بيرسون.

(حـ) أوجد معامل الارتباط سبيرمان.

(د) أوجد معادلة خط الانحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

(هـ) أوجد معادلة خط الانحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$.

س٢: إليك البيانات التالية:

$\sum س = ٨٠٠$، $\sum ص = ٨١١$، $\sum س ص = ٥٤١٠٧$

$\sum س^٢ = ٥٣٤١٨$، $\sum ص^2 = ٥٤٨٤٩$، ن = ١٢

أوجد: (١) معامل الارتباط بيرسون.

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

(٣) معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$.

س٣: إذا كانت $\sum_{ر=١}^{١٠}\left(س_ر - \overline{س}\right)\left(ص_ر - \overline{ص}\right) = ٦٠٠$

$$\sum_{ر=1}^{10}\left(\text{س}_{ر}-\overline{\text{س}}\right)^{2} = ١٠٠٠ ،\quad \sum_{ر=1}^{10}\left(\text{ص}_{ر}-\overline{\text{ص}}\right)^{2} = ٧٠٠$$

أوجد:

(١) معادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(٢) معادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.

(٣) معامل الارتباط بيرسون.

س٤: إذا كانت معادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$ هي: ص = ٠,٧ س − ١١ ومعادلة خط الانحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ هي: س = ١,٢٨ ص + ١٤.

أوجد: (١) الوسط الحسابي للمتغير س.

(٢) الوسط الحسابي للمتغير ص.

(٣) معامل الارتباط بيرسون.

(٤) الانحراف المعياري للمتغير س.

إذا علمت أن الانحراف المعياري للمتغير ص يساوي (١٠).

س٥: إليك الجدول التالي:

س	٣	٩	٦	١٢	١٥
ص	٤	٢	٦	٨	١٠

أوجد ما يلي: (١) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$.

(٢) معادلة انحدار $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$.

(٣) قيمة ص المتنبأ بها عندما س = ١٢ ثم أوجد الخطأ في التنبؤ؟

(٤) قيمة س المتنبأ بها عندما ص = ١٠ ثم أوجد الخطأ في التنبؤ؟

(٥) ارسم خط انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

س٦: الجدول التالي يبين رتب ثمانية متسابقين في مسابقتين رياضيتين احسب معامل الارتباط سبيرمان.

رتبة (س)	٣	٢	١	٤	٥.٥	٧	٨	٥.٥
رتبة (ص)	٢,٥	١	٢,٥	٥	٧	٥	٥	٨

س٧: الجدول التالي يبين تقادير (٩) طلاب في مبحثين مختلفين:

التقدير (س)	جيد	متوسط	ضعيف	ممتاز	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد	جيد
التقدير (ص)	ممتاز	متوسط	ممتاز	جيد جداً	جيد	جيد جداً	ممتاز	متوسط	متوسط

أوجد معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

س٨: إذا كانت معادلة خط انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$ هي: ص = ٠,٤ س + ١٧ وكانت ر = ٠,٧، $\overline{س}$ = ٦٠ أوجد معادلة انحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$.

س٩: إذا كانت مجموع مربعات فروق الرتب بين س، ص يساوي (٥٣٩٤) وكان عدد أزواج المشاهدات (٣٠) أوجد معامل الارتباط للرتب (سبيرمان).

س١٠: إذا كانت معادلة خط الانحدار $\left(\frac{س}{ص}\right)$ هي: س = ٠,٣ ص + ٢٠ و كان $\overline{ص}$ ٤٠،

$\sum_{ر=١}^{١٥}(س_ر - \overline{س})^٢ = ٣٧٥$، $\sum_{ر=١}^{١٥}(ص_ر - \overline{ص})^٢ = ٩٦٠$.

أوجد (١) معادلة انحدار $\left(\frac{ص}{س}\right)$.

(٢) معامل الارتباط بيرسون.

٦

الوحدة السادسة

الاحتمالات

The Probability

الاحتمالات

The Probability

مقدمة:

قبل البدء في دراسة الاحتمالات لابد من التعرف على نوع من التجارب وهي التجارب العشوائية، فمثلاً عند رمي قطعة نقد متزنة فليس من المؤكد بأنه ستظهر صورة مثلاً. لكن نفترض أننا كررنا هذه التجربة في رمي قطعة نقد وأن (ق) هو عدد مرات النجاح (أي ظهور الصورة عند رمي قطعة النقد) وأن (ن) هو عدد رميات قطعة النقد وبالتالي فإن التكرار النسبي لـ ق يساوي $\left(\frac{\text{ق}}{\text{ن}}\right)$ وكلما زادت (ن) نلاحظ بأن هذه النسبة تصبح مستقرة. وعلى هذا الاستقرار بنيت نظرية الاحتمال.

(٦-١) فضاء العينة والأحداث: (Sample Space & Events):

تعريف (١):

تسمى مجموعة كل النواتج الممكنة لأي تجربة عشوائية بالفضاء العيني وسنرمز له بالرمز (Ω).

تعريف (٢):

أي مجموعة جزئية من الفضاء العيني يسمى الحدث.

أنواع الأحداث:

١- الحدث المستحيل: وهو الحدث الذي يستحيل وقوعه وسنرمز له بالرمز ($\emptyset$).

٢- الحدث البسيط: وهو الحدث الذي يحتوي عنصر واحد.

٣- الحدث المركب: وهو الحدث الذي يحتوي على أكثر من عنصر واحد.

٤- الحدث الأكيد (المؤكد): وهو الحدث المؤكد وقوعه وهو (Ω).

أمثلة:

١- ألقي حجر نرد مرة واحدة ولوحظ العدد الظاهر أوجد ما يلي:

أ - اكتب الفضاء العيني بذكر عناصره.

ii – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي واذكر نوعه.
iii – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد فردي واذكر نوعه.
iv – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي.
v – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي ويقبل القسمة على(٢) واذكر نوعه.
vi – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي ويقبل القسمة على(٥) واذكر نوعه.
vii – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي أو يقبل القسمة على (٣).
viii – اكتب الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي وعدد فردي.

الحل:

i – الفضاء العيني لهذه التجربة هو Ω = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }
ii – لنفترض (أ) بأنه الحدث الذي يمثل ظهور عدد زوجي وبالتالي فإن:
أ = { ٢، ٤، ٦ } ونوع الحدث مركب.
iii – ليكن (ب) هو حدث يمثل ظهور عدد فردي فإن:
ب = { ١، ٣، ٥ } ونوع الحدث مركب.
iv – ليكن (حـ) هو حدث يمثل ظهور عدد أولي فإن:
حـ = { ٢، ٣، ٥ }
v – ليكن (د) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٢):
د = { ٢، ٤، ٦} وبالتالي فالمطلوب حـ $\cap$ د = العناصر المشتركة بين حـ & د
= { ٢ } ونوع الحدث بسيط.
vi – ليكن(هـ) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٥).
$\therefore$ هـ = { ٥ }
vii – ليكن (و) الحدث الذي يمثل ظهور عدد يقبل القسمة على (٣).
$\therefore$ و = { ٣، ٦ }
$\therefore$ وبالتالي فالمطلوب أ $\cup$ و = العناصر الموجودة في أ أو موجودة في و
= {٢، ٣، ٤، ٦ }
viii – المطلوب هو أ $\cap$ ب = ظهور عدد زوجي وفردي في نفس الوقت.
= $\varnothing$ ونوع هذا الحدث مستحيل.

ملاحظة:

نطلق على الأحداث الواردة في الفرع (viii) الحوادث المتمانعة (المتنافية) وأحياناً نسميها حوادث منفصلة.

٢- في تجربة رمي قطعة نقد ثلاث مرات أوجد ما يلي:

($أ_1$) اكتب الفضاء العيني (Ω) بذكر عناصره.

($أ_2$) اكتب الحدث (أ) الذي يمثل ظهور صورة واحدة فقط.

($أ_3$) اكتب الحدث (ب) الذي يمثل ظهور صورتين فقط.

($أ_4$) اكتب الحدث (حـ) الذي يمثل ظهور ثلاث صور فقط.

($أ_5$) اكتب الحدث (د) الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل.

($أ_6$) اكتب الحدث (هـ) الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الأكثر.

($أ_7$) اكتب الحدث (و) الذي يمثل ظهور صورة واحدة أو كتابة واحدة.

الحل:

($أ_1$) Ω = { ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك، ك ك ك }

($أ_2$) أ = { ص ك ك ، ك ص ك، ك ك ص }.

($أ_3$) ب = { ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص }.

($أ_4$) حـ = { ص ص ص }.

($أ_5$) د = { ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك }.

($أ_6$) هـ = { ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك ، ك ك ك }.

($أ_7$) و = أ ∪ ب = { ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص }.

(٦-٢) خواص الاحتمالات:

ليكن Ω الفضاء العيني و S مجموعة من الأحداث وليكن ح اقتران حقيقي معرف على S. يسمى ح اقتران (دالة) احتمال ويسمى العدد ح (أ) احتمال الحدث (أ) إذا تحققت الخواص التالية:

١- لأي حدث أ فإن: . ≤ ح (أ) ≤ ١.

٢- ح (Ω) = ١.

٣- إذا كان أ، ب حدثين منفصلين فإن ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب).

٤- إذا كان أ$_١$، أ$_٢$، ...، أ$_ن$ حوادث منفصلة مثنى مثنى (بمعنى أنـه أ$_ر$ ∩ أ$_ك$ = ∅ لكـل ر ≠ ك) فإن:

ح (أ$_١$ ∪ أ$_٢$ ∪ ... ∪ أ$_ن$) = ح (أ$_١$) + ح (أ$_٢$) + ... + ح (أ$_ن$).

نظريات في الاحتمال:

١- إذا كانت ∅ هي المجموعة الخالية فإن ح (∅) = صفر.

٢- إذا كان أ هو الحدث المتمم للحدث أ فإن:

ح (أ) = ١ – ح (أ).

٣- إذا كان أ، ب حدثين في Ω وكان أ ⊃ ب فإن: ح (أ) ≤ ح (ب).

٤- إذا كان أ، ب حدثين في Ω فإن:

i) ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب).

ii) ح (أ ∩ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∪ ب).

iii) ح (أ – ب) = ح (أ) – ح (أ ∩ ب).

iv) ح (ب – أ) = ح (ب) – ح (أ ∩ ب).

v) ح (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح ($\overline{\text{أ∪ب}}$) = ١ – ح (أ ∪ ب).

vi) ح (أ ∪ $\overline{\text{ب}}$) = ح ($\overline{\text{أ∩ب}}$) = ١ – ح (أ ∩ ب).

ملاحظة: نسمي (v) & (vi) قانوني ديمورغان في الاحتمالات.

٥- إذا كان أ، ب، حـ حوادث في Ω فإن:

ح (أ ∪ ب ∪ حـ) = ح (أ) + ح (ب) + ح (حـ) – ح (أ ∩ ب) – ح (أ ∩ حـ) – ح (ب ∩ حـ) + ح (أ ∩ ب ∩ حـ).

مثال (٣): ليكن أ ، ب حادثين في Ω بحيث ح (أ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ح (ب) = $\frac{٢}{٨}$

ح (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ أوجد ما يلي:

(١) ح (أ) . (٢) ح ($\overline{\text{ب}}$) . (٣) ح (أ ∪ ب).

(٤) $\text{ح}(\text{أ} \cap \overline{\text{ب}})$. (٥) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cap \text{ب})$. (٦) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}})$.

(٧) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}})$.

الحل:

(١) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}) = ١ - \text{ح}(\text{أ}) = ١ - \frac{٥}{٨} = \frac{٨-٥}{٨} = \frac{٣}{٨}$

(٢) $\text{ح}(\overline{\text{ب}}) = ١ - \text{ح}(\text{ب}) = ١ - \frac{٢}{٨} = \frac{٨-٢}{٨} = \frac{٦}{٨}$

(٣) $\text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \frac{٥}{٨} + \frac{٢}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٥+٢-١}{٨} = \frac{٦}{٨}$

(٤) $\text{ح}(\text{أ} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \frac{٥}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٥-١}{٨} = \frac{٤}{٨}$

(٥) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cap \text{ب}) = \text{ح}(\text{ب} \cap \overline{\text{أ}}) = \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \frac{٢}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$

(٦) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}) = ١ - \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = ١ - \frac{٦}{٨} = \frac{٢}{٨}$

(٧) $\text{ح}(\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}) = ١ - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = ١ - \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

مثال (٤):

إذا كان نسبة الطلبة الذين عيونهم زرقاء يساوي ٣٠٪ ونسبة الطلبة الذي شعرهم أشقر يساوي ٤٠٪ ونسبة الطلبة الذي عيونهم زرقاء وشعرهم أشقر يساوي ٢٠٪ اختير إحدى الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن يكون هذا الطالب شعره أشقر أو عيونه زرقاء.

(٢) احتمال أن لا تكون عيونه زرقاء.

(٣) احتمال أن يكون عيونه زرقاء وشعره ليس أشقر.

(٤) احتمال أن لا تكون عيونه زرقاء وشعره ليس أشقر.

الحل: ليكن أ: الحدث الذي يمثل ظهور طالب عيونه زرقاء فإن ح (أ) = ٠,٣.

ب: الحدث الذي يمثل ظهور طالب شعره أشقر فإن ح (ب) = ٠,٤.

ملاحظة: أداة الربط (أو) تعني الاتحاد (∪) وأداة الربط (و) تعني (∩) وأدوات النفي تعني المتممة.

أ ∩ ب: طالب عيونه زرقاء وشعره أشقر فإن ح (أ ∩ ب) = ٠,٢.

(١) المطلوب في هذا الفرع هو احتمال الحدث أ أو الحدث ب والذي يساوي

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٤ – ٠,٢ = ٠,٥.

(٢) المطلوب هنا هو متمم الحدث أ أي المطلوب ح ($\bar{أ}$) = ١ – ح (أ) = ١ – ٠,٣ = ٠,٧.

(٣) ح (أ ∩ $\bar{ب}$) = ح (أ) – ح (أ ∩ ب) = ٠,٣ – ٠,٢ = ٠,١

(٤) ح ($\bar{أ}$ ∩ $\bar{ب}$) = ح ($\overline{أ ∪ ب}$) = ١ – ح (أ ∪ ب) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥.

(٦-٣) الفضاء العيني المنتظم: (Uniform Sampling Space):

تعريف:

نقول بأن فضاء عيني معين بأنه منتظم إذا كان لكل عنصر فيه نفس فرصة الحدوث. فمثلاً إذا كان الفضاء العيني (Ω) يحتوي على (ن) عنصر فإن احتمال كل عنصر فيه يساوي $\left(\frac{١}{ن}\right)$ وبالتالي فإن احتمال الحدث (أ) في الفضاء العيني المنتظم (Ω) يساوي:

$$ح (أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث أ}}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الفضاء العيني } \Omega}$$

مثال (٥): اختيرت ورقة من ورق اللعب (الشدة) بطريقة عشوائية أوجد احتمال ما يلي:

(١) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة بستوني.

(٢) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة أس.

(٣) الحدث الذي يمثل ظهور ورقة صورة.

(٤) الحدث الذي يمثل ظهور صورة بستوني.

الحل: ليكن أ: يمثل ظهور ورقة بستوني.

ب: يمثل ظهور ورقة أس.

حـ : يمثل ظهور ورقة صورة.

(١) ح (أ) = $\frac{\text{عدد ورق البستوني}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{١٣}{٥٢} = \frac{١}{٤}$

(٢) ح (ب) = $\frac{\text{عدد ورق الأس}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{٤}{٥٢} = \frac{١}{١٣}$

(٣) ح (حـ) = $\frac{\text{عدد الصور}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$

(٤) ح (أ $\cap$ حـ) = $\frac{\text{عدد الصور البستونية}}{\text{عدد ورق اللعب}} = \frac{٣}{٥٢}$

مثال (٦): لتكن التجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحوادث التالية:

(١) الحدث أ: الذي يمثل مجموع العددين الظاهرين يساوي (١٠).

(٢) الحدث ب: الذي يمثل الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي (٥).

(٣) الحدث حـ: الذي يمثل أحد الوجهين الظاهرين يساوي (١).

الحل: الفضاء العيني لهذه التجربة هو: Ω = { (١، ١)، (١، ٢)، ...، (٦، ٦)}

(١) الحدث أ = { (٤، ٦)، (٥، ٥)، (٦، ٤) }

ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر (أ)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$

(٢) الحدث ب = { (١، ٦)، (٦، ١) }

ح (ب) = $\frac{\text{عدد عناصر (ب)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{٢}{٣٦} = \frac{١}{١٨}$

(٣) الحدث حـ = { (١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٣، ١)، (٤، ١)، (٥، ١)، (٦، ١) }

$$ح\,(حـ) = \frac{\text{عدد عناصر (جـ)}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{١١}{٣٦}$$

(٦-٤) التباديل: (The Permutations):

تعريف: يسمى وضع (ن) من الأشـياء في ترتيـب معـين بأنـه تبديـل لهـذه الأشـياء (بشرط أن تؤخذ جميع الأشياء) ويسمى وضع أي عدد (ر) بحيث (ر ≤ ن) مـن هـذه الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل العدد (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة.

مثال (٧): اعتبر بأنه لدينا الحروف التالية: أ، ب، حـ أوجد:

(١) تباديل الثلاثة حروف مأخوذة جميعها في كل مرة.

(٢) تباديل الثلاثة حروف مأخوذة اثنين في كل مرة.

الحل: (١) تباديل الحروف الثلاثة مأخوذة جميعها في كل مرة هي:

أ ب حـ، أ حـ ب، ب أ حـ، ب حـ أ، حـ أ ب، حـ ب أ

(٢) تباديل الحروف الثلاثة مأخوذة اثنين في كل مرة هي:

أ ب، ب أ، أ حـ، حـ أ، ب حـ، حـ ب.

مثال (٨): أوجد عدد التباديل المكونة من ستة أرقـام وهـي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ والمـأخوذة ثلاثة في كل مرة.

الحل: المطلوب هنا عدد الأرقام المكونة من ثلاث منازل مختلفة من هذه الأرقام الستة المختلفة وبالتالي لها الصورة التالية:

منزلة آحاد	منزلة عشرات	منزلة المئات

وعلى هذا يمكن اختيار منزلة الآحاد بطرق عددها (٦) ومنزلـة المئـات بطـرق عددها (٥) ومنزلة المئات بطرق عددها (٤) وعليه فإن عدد التباديل تساوي:

٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠

رمز المضروب: يعرف مضروب العدد (ن) بالرمز التالي:

ن ! = ن × ن – ١ × ن – ٢ × ... × ١

ملاحظة: (١) ١ ! = ١

(٢) ٠ ! = ١

(٣) ن ! = ن × ن –١ × ن – ٢ × ... × ر !

حيث ر ≤ ن.

ملاحظة: سنستخدم الرمز تب (ن، ر) ليدلل على تباديل ن من الأشياء مأخوذة ر في كل مرة.

نظرية: ليكن ر، ن عددين صحيحين موجبين بحيث ر ≤ ن فإن:

$$\text{تب (ن، ر)} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن – ر)!}}$$

ملاحظة: (١) تب (ن، ن) = ن !

(٢) تب (ن، صفر) = ١

العينات المرتبة (Ordered Samples):

أن سحب كرة من وعاء به (ن) من الكرات أو اختيار ورقة من مجموعة أوراق أو اختيار شخص من مجتمع عدد معين من المرات مقداره (ر) بعينة مرتبة حجمها (ر) وسوف نقوم بدراسة حالتين مختلفتين:

(١) السحب مع الإرجاع: في هذه الحالة تعاد كرة إلى الوعاء قبل سحب الكرة الثانية وحيث أنه يوجد (ن) طريقة لاختيار الكرة الأولى و (ن) طريقة لاختيار الكرة الثانية وهكذا وبالتالي فإن عدد العينات المرتبة ذات الحجم (ر) مع الإرجاع تساوي: $\underbrace{\text{ن} \times \text{ن} \times \text{ن} \times \ldots \times \text{ن}}_{\text{ر من المرات}} = \text{ن}^{\text{ر}}$.

(٢) السحب دون إرجاع: في هذه الحالة لا تعاد الكرة إلى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وبذلك لا توجد تكرارات في العينة المرتبة وعليه يكون عدد العينات المرتبة إذا كان السحب دون إرجاع هو تبديل (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة وهذا يساوي تب (ن، ر).

مثال: كيس يحتوي على (١٠) كرات سحبت عينة مكونة من (٤) كرات أوجد ما يلي:

(١) عدد العينات المكونة من أربع كرات إذا كان السحب مع الإرجاع.
(٢) عدد العينات المكونة من أربع كرات إذا كان السحب بدون إرجاع.

الحل: (١) إذا كان السحب مع الإرجاع فإن الكرة الأولى التي تسحب تعاد قبل سحب الكرة الثانية وعليه يكون عدد العينات = ١٠× ١٠× ١٠× ١٠ = ١٠٠٠٠.

(٢) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الكرة الأولى التي تسحب لا تعاد قبل سحب الكرة التالية وعليه يكون عدد العينات = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤٠.

(٦-٥) التوافيق: (The Combinations):

يعرف توافيق (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة بأنه عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي (ر) عنصر من مجموعة عدد عناصرها (ن).

مثال (٩): أوجد عدد توافيق الحروف أ، ب، حـ مأخوذة اثنين في كل مرة.

الحل: المطلوب عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها (٢) من المجموعة {أ، ب، حـ } وبالتالي فإن المجموعات الجزئية هي:

{أ، ب}، {أ، حـ}، {ب، حـ} وعليه يكون عدد المجموعات الجزئية تساوي (٣).

ملاحظة: سنرمز لتوافيق (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة بالرمز تو (ن، ر).

نظرية: تو (ن، ر) = $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$

نظرية: ليكن ن، ر عدد صحيحين بحيث ر ≤ ن فإن:

(١) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ وبالتالي فإن $\binom{ن}{أ} = \binom{ن}{ب}$ ⇔ أ = ب أو أ + ب = ن

(٢) $\binom{ن}{٠} = \binom{ن}{ن} = ١$.

(٣) $\binom{ن}{١} = ن$

(٤) $\binom{ن}{ر} + \binom{ن}{ر-١} = \binom{ن+١}{ر}$

(٥) $\binom{ن}{٢} = \frac{ن \times ن-١}{٢}$

مثال: كم لجنة رباعية يمكن تكوينها من عشرة أشخاص؟

الحل: عدد اللجان الرباعية التي يمكن تكوينها من عشرة أشخاص هي توافيق (١٠) أشخاص مأخوذ أربعة أشخاص في كل مرة تساوي $\binom{١٠}{٤} = \frac{١٠\times٩\times٨\times٧\times٦!}{٦!\ ٤\times٣\times٢\times١} = ٢١٠$

الجزيئات المرتبة: (Ordered Partitions):

لنفترض بأن لدينا وعاء أ بـه ن مـن الكـرات مرقمـة بـالأعداد مـن ١ إلى ن ولنفرض أننا نريد حساب عدد الطرق التي يمكن سحب ($ن_{١}$) كـرة مـن الوعـاء ثـم سحب ($ن_{٢}$) كرة من الوعاء ... وهكذا إلى سـحب ($ن_{ر}$) كـرة مـن الوعـاء وبعبـارة أخـرى حسـاب عـدد التجزيئـات المرتبـة ($أ_{١}$، ... ، $أ_{ر}$) لمجموعـة الكـرات (ن) إلى مجموعات جزئية بحيث تحتوي $أ_{١}$ على $ن_{١}$ كرة، ... ، $أ_{ر}$ تحتوي على $ن_{ر}$ كـرة شـريطة أن تكون $ن_{١} + ... + ن_{ر} = ن$.

في البداية توجد لدينا ن كرة في الوعاء فإنه توجد $\binom{ن}{ن_{١}}$ طريقـة لسـحب $ن_{١}$ كرة وبعد ذلك يتبقى ($ن - ن_{١}$) كرة في الوعاء فإنه توجد $\binom{ن - ن_{١}}{ن_{٢}}$ طريقـة لتحديـد المجموعة الجزئية الثانية $أ_{٢}$ ... وهكذا وعليه يكون عدد التجزيئات المختلفة تساوي:

$$\frac{ن!}{ن_{١}!\,ن_{٢}!\,...\,ن_{ر}!}$$

مثال (١٠): بكم طريقة يمكن توزيـع (١١) لعبـة علـى خمسـة أطفـال بحيـث يتلقـى الطفل الأول خمس لعب والباقي لعبتين.

الحل: عدد الطرق التي يمكن توزيع (١١) لعبة على خمسة أطفال تساوي:

$$\binom{١١}{٥}\binom{٦}{٢}\binom{٤}{٢}\binom{٢}{٢} = \frac{١١!}{٥!٢!٢!٢!} = ٤١٥٨٠$$

مثال (١١): صندوق فيه (٨) مصابيح من بينها (٣) مصابيح معيبة سحبت مصبـاحين أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن يكون المصباحين صالحين.

(٢) احتمال أن يكون المصباحين معيبين.

الحل: يمكن اختيار مصباحين من بين ثمانية مصابيح بطرق عددها.تساوي $\binom{٨}{٢} =$ ٢٥٨ طريقة.

ويمكن اختيار مصباحين صالحين بعدد طرق يساوي $\binom{5}{2} = 10$

ويمكن اختيار مصباحين معيبين بعدد طرق يساوي $\binom{3}{2} = 3$

وعليه يكون:

(١) احتمال الحصول على مصباحين صالحين = $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

(٢) احتمال الحصول على مصباحين معيبين = $\frac{3}{28}$

مثال (١٢): سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من ورق اللعب أوجد احتمال ما يلي:

(١) كلا الورقتين المسحوبتين ديناري.

(٢) إحدى الورقتين ديناري والأخرى سانك.

الحل: توجد $\binom{52}{2}$ = ١٣٢٦ طريقة لسحب ورقتين من الشدة.

ويوجد $\binom{13}{2}$ = ٧٨ طريقة لسحب ورقتين ديناري من بين (١٣) ورقة ديناري.

ويوجد ١٣ × ١٣ = ١٦٩ طريقة لسحب ورقة ديناري والأخرى سانك وعليه يكون:

(١) احتمال أن تكون الورقتين ديناري= $\frac{\text{عدد الطرق التي يمكن سحب ورقتي الديناري}}{\text{عدد الطرق التي يمكن سحب ورقتين من الشدة}}$

$= \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$

(٢) احتمال أن تكون إحدى الورقتين ديناري والأخرى سانك = $\frac{169}{1326} = \frac{13}{102}$

مثال (١٣): اختيرت أربعة مصابيح كهربائية من بين عشرة مصابيح كهربائية منها أربعة تالفة أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن تكون جميعها سليمة.

(٢) احتمال أن تكون جميعها تالفة.

(٣) احتمال أن يكون واحد فقط تالف.

(٤) احتمال أن يكون واحد على الأقل تالف.

الحل: يوجد هنالك $\binom{١٠}{٤}$ = ٢١٠ طريقة لاختيار (٤) مصابيح من بين عشرة مصابيح.

(١) بما أن عدد المصابيح السليمة = ١٠ – ٤ = ٦ مصابيح فإنه يوجد $\binom{٦}{٤}$ = ١٥ طريقة لاختيار المصابيح السليمة. وبالتالي فاحتمال أن تكون جميعها سليمة $= \frac{١٥}{٢١٠} = \frac{٥}{٧٠} = \frac{١}{١٤}$.

(٢) بما أن عدد المصابيح التالفة = ١٠ – ٦ = ٤ مصابيح فإنه توجد $\binom{٤}{٤}$ = ١ طريقة لاختيار المصابيح التالفة وبالتالي فاحتمال أن تكون جميعها تالفة يساوي $\frac{١}{٢١٠}$.

(٣) يوجد هنالك $\binom{٦}{٣}\binom{٤}{١}$ = ٨٠ طريقة لاختيار مصباح واحد فقط تالف وبالتالي فالاحتمال $= \frac{٨٠}{٢١٠} = \frac{٨}{٢١}$.

(٤) الحدث الذي يمثل وجود مصباح واحد تالف على الأقل هو الحدث المتمم لأن تكون جميعها سليمة وبالتالي فاحتمال وجود على الأقل واحد تالف يساوي $١ - \frac{١}{١٤} = \frac{١٣}{١٤}$.

مثال (١٤): سحبت ورقتين بطريقة عشوائية من بين (١٠) ورقات مرقمة بالأعداد من ١ إلى ١٠ أوجد احتمال أن يكون مجموعهما زوجياً:

(١) تم سحب الورقتين معاً.

(٢) تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى دون إرجاع.

(٣) تم سحب الورقتين ورقة بعد أخرى مع الإرجاع.

الحل: (١) يوجد $\binom{١٠}{٢}$ = ٤٥ طريقة لاختيار ورقتين من بين (١٠) ورقات ويكون

المجموع زوجياً إذا كان العددين كليهما زوجياً أو فردياً وبما أنه يوجد لدينا ٥ أرقام زوجية و ٥ أرقام فردية وبما أنه إذا ظهر إحدى الورقتين عدد زوجي فيجب أن تكون الورقة الأخرى عدد زوجي وعليه يكون إحدى الورقتين يتم اختيارها بـ ٥ طرق وأخرى بـ ٤ طرق وعليه يكون هنالك ٢٠ طريقة لاختيار عددين زوجي أو فرديين وبالتالي فالاحتمال = $\frac{٢٠}{٤٥} = \frac{٤}{٩}$.

(٢) توجد هنالك ١٠ × ٩ = ٩٠ طريقة لسحب ورقتين ورقة بعد أخرى بدون إرجاع وتوجد ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة لسحب عدد زوجي ثم عدد زوجي وكذلك ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة لسحب عدد فردي ثم عدد فردي وبالتالي فالاحتمال = $\frac{٢٠+٢٠}{٩٠} = \frac{٤٠}{٩٠} = \frac{٤}{٩}$.

(٣) توجد هنالك ١٠ × ١٠ = ١٠٠ طريقة لسحب ورقتين واحدة بعد أخرى مع الإرجاع وتوجد ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة لسحب عدد زوجي ثم عدد زوجي وكذلك ٥× ٥ = ٢٥ طريقة لسحب عدد فردي ثم عدد فردي وبالتالي فالاحتمال المطلوب = $\frac{٢٥+٢٥}{٩٠} = \frac{٥٠}{٩٠} = \frac{٥}{٩}$.

تعريف: ليكن أ$_{١}$، أ$_{٢}$، ... ، أ$_{ن}$ حوادث في Ω فإننا نسمى هذه الحوادث متباعدة وشاملة إذا حققت الشروط التالية:

(١) منفصلة مثنى مثنى أي بمعنى أ$_{ر}$ $\cap$ أ$_{ك}$ = $\varnothing$ لكل ر $\neq$ ك.

(٢) أ$_{١}$ $\cup$ أ$_{٢}$ $\cup$ ... $\cup$ أ$_{ن}$ = Ω.

مثال(١٥): ليكن التجربة رمي حجر نرد مرة واحدة ولتكن:

أ$_{١}$ = {١، ٢، ٣} أ$_{٢}$ = {٤، ٥} أ$_{٣}$ = {٦} هل أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$ متباعدة وشاملة.

الحل: نتحقق من الشروط الواردة في التعريف:

(١) أ$_{١}$ $\cap$ أ$_{٢}$ = $\varnothing$، أ$_{١}$ $\cap$ أ$_{٣}$ = $\varnothing$، أ$_{٢}$ $\cap$ أ$_{٣}$ = $\varnothing$

وبالتالي أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$ متباعدة (منفصلة).

(٢) أ$_{١}$ $\cup$ أ$_{٢}$ $\cup$ أ$_{٣}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} = Ω

وبالتالي فإن أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$ متباعدة وشاملة.

نظرية: إذا كان $أ_١$، $أ_٢$، ... ، $أ_ن$ متباعدة وشاملة فإن:

ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ... + ح ($أ_ن$) = ١

مثال (١٦): ليكن $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ حوادث متباعدة وشاملة في Ω بحيث ح ($أ_١$) = ٠,٢، ح ($أ_٢$) = ٠,٣ أوجد ح ($أ_٣$).

الحل: $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ حوادث متباعدة وشاملة فإن ح($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ح ($أ_٣$) = ١ ومنها ٠,٢ + ٠,٣ + ح ($أ_٣$) = ١ ⇐ ح ($أ_٣$) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥.

مثال: صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد في الرمية الواحدة متناسباً مع العدد نفسه (فمثلاً احتمال ظهور العدد ٢ ضعف احتمال ظهور العدد ١).

أوجد ما يلي:

(١) احتمال ظهور كل وجه من الأوجه الستة.

(٢) إذا كان أ: الحدث الذي يمثل ظهور عدد أولي أوجد احتمال الحدث أ.

الحل: (١) لنفترض بأن ح (١) = س وبالتالي فإن:

ح (٢) = ٢ س ، ح (٣) = ٣ س ، ح (٤) = ٤ س ، ح (٥) = ٥ س ، ح (٦) = ٦ س وعليه يكون : س + ٢ س + ٣ س + ٤ س + ٥ س + ٦ س = ١

ومنها ٢١ س = ١ ⇐ س = $\frac{١}{٢١}$.

وعندئذ:

ح(١) = $\frac{١}{٢١}$، ح(٢) = $\frac{٢}{٢١}$، ح(٣) = $\frac{٣}{٢١}$، ح(٤) = $\frac{٤}{٢١}$، ح(٥) = $\frac{٥}{٢١}$، ح(٦) = $\frac{٦}{٢١}$

(٢) أ = {٢، ٥، ٣} وبالتالي ح (أ) = ح ({٢، ٥، ٣}) = $\frac{٢+٥+٣}{٢١} = \frac{١٠}{٢١}$

مثال (١٧): إذا كانت أ، ب، حـ حوادث متباعدة وشاملة في Ω بحيث أن ح (أ) = ٢ ح (ب) ، ح (ب) = ٣ ح (حـ).

أوجد ح (أ)، ح (ب)، ح (حـ).

الحل: لنفترض بأن ح (حـ) = س فإن ح (ب) = ٣ س وعليه ح (أ) = ٦ س ومنها

٦ س + ٣ س + س = ١ ⇐ ١٠ س = ١ ⇐ س = $\frac{١}{١٠}$.

∴ ح (حـ) = $\frac{١}{١٠}$، ح (ب) = $\frac{٣}{١٠}$، ح (أ) = $\frac{٦}{١٠}$.

(٦-٦) الحوادث المشروطة واحتمالها:

(Conditional Events & Probability):

تعريف: لنفرض بأن ي أي حدث في الفضاء العيني Ω بحيث ح (ي) > صفر وبالتالي فإن احتمال وقوع الحدث أ بفرض أن ي قد وقع يساوي ح (أ \ ى) = $\frac{ح(أ \cap ى)}{ح(ى)}$

نظرية: لنفترض بأن Ω فضاء عيني منته وأن أ و ى حدثان فإن:

$$ح (أ \setminus ى) = \frac{\text{عدد العناصر في } أ \cap ى}{\text{عدد العناصر في } ى} = \frac{\text{عدد الطرق التي يقع بها أ و ى}}{\text{عدد الطرق التي يقع بها ى}}$$

مثال (١٨): نفترض بأننا ألقينا حجري نرد. إذا كان المجموع يقبل القسمة على ٣ فأوجد احتمال أن يكون أحد الحجرين هو العدد ٣.

الحل: ليكن ى = { المجموع يقبل القسمة على ٣ } = { (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٣)، (١، ٥)، (٥، ١)، (٣، ٦)، (٦، ٣)، (٦، ٦) }.

أ = { ظهور العدد ٣ في حجر واحد على الأقل }

= {(٣، ٣)، (٣، ٦)، (٦، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٤، ٣)، (٥، ٣)}.

⟸ أ ∩ ى = {(٣، ٣)، (٣، ٦)، (٦، ٣)}.

∴ ح (أ \ ى) = $\frac{\text{عدد العناصر في } أ \cap ى}{\text{عدد العناصر في } ى} = \frac{٣}{١٠}$

مثال (١٩): ليكن أ، ب حدثين في Ω بحيث أن ح (أ) = $\frac{١}{٢}$، ح (ب) = $\frac{١}{٣}$، ح (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:

(١) ح (أ / ب).　　(٢) ح (ب / أ).　　(٣) ح (أ ∪ ب).

(٤) ح $[\overline{أ} / \overline{ب}]$.　　(٥) ح $[\overline{ب} / \overline{أ}]$.　　(٦) ح $[\overline{أ} / ب]$.

(٧) ح $(أ / \overline{ب})$.

الحل: (١) $\text{ح}\,(\text{أ}\,/\,\text{ب}) = \dfrac{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \dfrac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٣}} = \dfrac{٣}{٤}.$

(٢) $\text{ح}\,(\text{ب}\,/\,\text{أ}) = \dfrac{\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{أ})} = \dfrac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}.$

(٣) $\text{ح}\,(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}\,(\text{أ}) + \text{ح}\,(\text{ب}) - \text{ح}\,(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \dfrac{١}{٢} + \dfrac{١}{٣} - \dfrac{١}{٤} = \dfrac{٦+٤-٣}{١٢} = \dfrac{٧}{١٢}.$

(٤) $\text{ح}\left(\overline{\text{أ}}\,/\,\overline{\text{ب}}\right) = \dfrac{\text{ح}\left(\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}\right)}{\text{ح}(\overline{\text{ب}})} = \dfrac{\text{ح}\left(\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}\right)}{\text{ح}(\overline{\text{ب}})} = \dfrac{١ - \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب})}{١ - \text{ح}(\text{ب})} = \dfrac{١ - \frac{٧}{١٢}}{١ - \frac{١}{٣}} = \dfrac{\frac{٥}{١٢}}{\frac{٢}{٣}} = \dfrac{٥}{٨}$

(٥) $\text{ح}\left(\overline{\text{ب}}\,/\,\overline{\text{أ}}\right) = \dfrac{\text{ح}\left(\overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{أ}}\right)}{\text{ح}\left(\overline{\text{أ}}\right)} = \dfrac{\text{ح}\left(\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}\right)}{\text{ح}\left(\overline{\text{أ}}\right)} = \dfrac{١ - \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب})}{١ - \text{ح}(\text{أ})} =$

$\dfrac{١ - \frac{٧}{١٢}}{١ - \frac{١}{٢}} = \dfrac{\frac{٥}{١٢}}{\frac{١}{٢}} = \dfrac{٥}{٦}$

(٦) $\text{ح}\left(\overline{\text{أ}}\,/\,\text{ب}\right) = \dfrac{\text{ح}\left(\overline{\text{أ}} \cap \text{ب}\right)}{\text{ح}(\text{ب})} = \dfrac{\text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \dfrac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}}{\frac{١}{٣}} = \dfrac{١}{٤}$

(٧) $\text{ح}\left(\text{أ}\,/\,\overline{\text{ب}}\right) = \dfrac{\text{ح}\left(\text{أ} \cap \overline{\text{ب}}\right)}{\text{ح}(\overline{\text{ب}})} = \dfrac{\text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})}{١ - \text{ح}(\text{ب})} = \dfrac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}}{١ - \frac{١}{٣}} = \dfrac{\frac{١}{٤}}{\frac{٢}{٣}} = \dfrac{٣}{٨}$

مثال (٢٠): في إحدى الجامعات إذا كانت نسبة الذين يتحدثون الإنجليزية ٣٠٪ والذين يتحدثون الفرنسية ٢٠٪ ويتحدثون اللغتين معاً ١٠٪ اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي:

(١) ما احتمال أن يتحدث الإنجليزية إذا كان يتحدث الفرنسية.

(٢) إذا كان لا يتحدث الفرنسية فما احتمال أن يتحدث الإنجليزية.

(٣) إذا كان يتحدث الفرنسية فما احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية.

(٤) ما هو احتمال أن يكون يتحدث إحدى اللغتين على الأقل.

الحل: نفرض بأن أ: طالب يتحدث الإنجليزية ⇐ ح (أ) = ٠,٣

ب: طالب يتحدث الفرنسية ⇐ ح (ب) = ٠,٢

أ ∩ ب: طالب يتحدث اللغتين معا ⇐ ح (أ ∩ ب) = ٠,١

$$(١)\ \text{ح}\,(\text{أ}/\text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \frac{٠,١}{٠,٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(٢)\ \text{ح}\,(\text{أ}/\bar{\text{ب}}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}\cap\bar{\text{ب}})}{\text{ح}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})}{١ - \text{ح}(\text{ب})} = \frac{٠,٣ - ٠,١}{١ - ٠,٢} = \frac{٠,٢}{٠,٨} = \frac{١}{٤}$$

$$(٣)\ \text{ح}\,(\bar{\text{أ}}/\text{ب}) = \frac{\text{ح}(\bar{\text{أ}}\cap\text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \frac{\text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} = \frac{٠,١}{٠,٢} = \frac{١}{٢}$$

(٤) ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) − ح(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٢ − ٠,١ = ٠,٤.

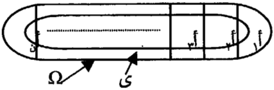
نظرية: إذا كان أ، ب حدثين في Ω فإن ح (أ ∩ ب) = ح (أ / ب) . ح (ب)

نظرية بييز: Baye's Theorem:

ليكن ى أي حادث في الفضاء العيني Ω بحيث أن ح (ى) > صفر. وكانت $\text{أ}_١، \text{أ}_٢، ...، \text{أ}_\text{ن}$ حوادث متباعدة وشاملة في Ω فإن:

$$\text{ى} = (\text{ى} \cap \text{أ}_١) \cup ... \cup (\text{ى} \cap \text{أ}_\text{ن})$$

⇐



$$\text{ح}\,(\text{ى}) = \text{ح}\,(\text{ى} \cap \text{أ}_١) + ... + \text{ح}\,(\text{ى} \cap \text{أ}_\text{ن})$$

$$= \text{ح}\,(\text{أ}_١)\,.\,\text{ح}\,(\text{ى}/\text{أ}_١) + ... + \text{ح}\,(\text{أ}_\text{ن})\,.\,\text{ح}\,(\text{ى}/\text{أ}_\text{ن}) \quad ...\ (١)$$

وتسمى المعادلة (١) بالنظرية التمهيدية لبييز.

$$\text{ح}\,(\text{أ}_\text{ر}/\text{ى}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}_\text{ر} \cap \text{ى})}{\text{ح}(\text{ى})} = \frac{\text{ح}(\text{أ}_\text{ر})\,.\,\text{ح}(\text{ى}/\text{أ}_\text{ر})}{\text{ح}(\text{ى})} \quad ...\ (٢)$$

لكل ر = ١، ٢، ...، ن

وتسمى المعادلة (٢) بنظرية بييز.

مثال (٢١): تطبع ثلاثة طابعات أ، ب، حـ في مكتب للسكرتيريا على التـوالي ٣٠٪، ٥٠٪، ٢٠٪ من الرسائل المطبوعة إذا كان احتمال وجود خطأ مطبعـي واحـد على الأقل في الرسائل للطابعات أ، ب، حـ على التـوالي هـي ٣٪، ٦٪، ٤٪ اختيرت إحدى الرسائل بطريقة عشوائية.

(١) أوجد احتمال أن يكون بها خطأ مطبعي واحد على الأقل.

(٢) إذا علمت بأن الرسالة يوجد بها خطأ فما احتمال أن تكون من طباعة أ.

الحل: $أ_١$: الرسالة من طباعة أ ⇐ ح $(أ_١)$ = ٠,٣.

$أ_٢$: الرسالة من طباعة ب ⇐ ح $(أ_٢)$ = ٠,٥.

$أ_٣$: الرسالة من طباعة حـ ⇐ ح $(أ_٣)$ = ٠,٢.

ى: وجود خطأ مطبعي واحد على الأقل.

ح (ى / $أ_١$) = ٠,٠٣ ، ح (ى / $أ_٢$) = ٠,٠٦ ، ح (ى / $أ_٣$) = ٠,٠٤

(١) ح (ى)= ح $(أ_١)$. ح (ى / $أ_١$) + ح $(أ_٢)$. ح (ى / $أ_٢$) + ح $(أ_٣)$. ح (ى / $أ_٣$)

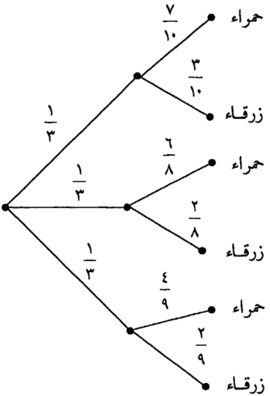
= ٠,٣ × ٠,٠٣ + ٠,٥ × ٠,٠٦ + ٠,٢ × ٠,٠٤

= ٠,٠٩ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٨ = ٠,٠٤٧

(٢) ح ($أ_١$ / ى) = $\frac{ح(أ_١).ح(ى/أ_١)}{ح(ى)} = \frac{٠,٣\times٠,٠٣}{٠,٠٤٧} = \frac{٠,٠٠٩}{٠,٠٤٧} = \frac{٩}{٤٧}$

مثال(٢٢): لدينا ثلاثة صناديق: في الصندوق I ٧ كرات حمراء و ٣ زرقاء وفي الصندوق II ٦ حمـراء و ٢ زرقـاء وفي الصنـدوق III ٥ حمـراء و ٤ زرقـاء اختـير احـد الصناديق بشكل عشوائي ثم اختيرت منه كرة ما احتمال أن تكون حمراء.

الحل: في عملية الاختيار هذه فإن عمليـة السـحب تتـم علـى مرحلتـين وهـي أولاً عملية اختيار الصندوق وثم عملية اختيار الكرة وفي هذا المثال سـنقوم برسـم شجرة الاحتمال كالتالي:



∴ احتمال أن تكون الكرة حمراء $= \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٦}{٨} + \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٩}$

$$= \frac{٧}{٣٠} + \frac{٢}{٨} + \frac{٥}{٢٧}$$

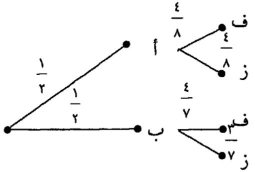
$$= \frac{٧}{٣٠} + \frac{١}{٤} + \frac{٥}{٢٧} = \frac{٣٦١}{٥٤٠}$$

مثال (٢٣): يحتوي صندوق أ على ثمانية ورقات مرقمة من ١ إلى ٨ ويحتوي الصندوق ب على أربعة أوراق مرقمة من ١ إلى ٧ اختير أحد الصناديق بطريقة عشوائية وسحبت منه ورقة إذا كان رقم الورقة المسحوبة فردياً فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق ب.

الحل: لنرمز للعدد الفردي بالرمز (ف) وللعدد الزوجي بالرمز (ز) والمطلوب في هذا المثال هو ح (ب / ف).

يوجد مسارات للعدد الفردي إذاً

$$ح(ف) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٧} = \frac{١٥}{٢٨}$$



ح (ب ∩ ف) = احتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الصندوق ب ومكتوب عليها عدد فردي = $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

$$\therefore \text{ح (ب / ف)} = \frac{\text{ح(ب} \cap \text{ف)}}{\text{ح(ف)}} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{15}{28}} = \frac{8}{15}$$

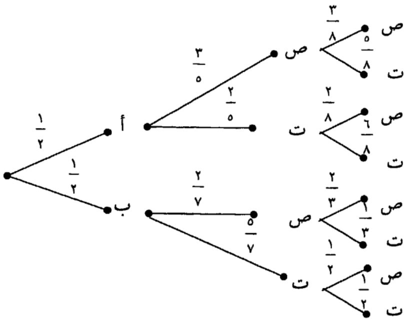
مثال (٢٤): لدينا صندوقان كما يلي:

الصندوق أ به ٣ مصابيح صالحة و ٢ مصابيح تالفة.

الصندوق ب به ٢ مصابيح صالحة و ٥ مصابيح تالفة.

اختير صندوق بطريقة عشوائية ثم سحب منه مصباح ووضع في الصندوق الآخر وبعد ذلك سحب مصباح من الصندوق الثاني أوجد احتمال أن يكون كلا المصباحين صالحين.

الحل: لنرمز للمصباح الصالح بالرمز (ص) وللمصباح التالف بالرمز (ت) سنكون شجرة الاحتمال كالآتي:



وهكذا فإنه يوجد مساران للحصول على مصباحين صالحين

الاحتمال = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{٢}{٣} =$ ٠,٢٠٧

(٦-٧) الحوادث المستقلة واحتمالها:

(Independence Events and it's Probability):

تعريف: نقول بأن الحدثين أ، ب مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يتأثر بوقوع الآخر وهذا يعني بأن ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب).

مثال (٢٥): إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث ح (أ) = ٠,٤، ح (ب) = ٠,٩، ح (أ ∪ ب) = ٠,٩٤ فهل أ، ب حدثين مستقلين؟

الحل: سنقوم أولاً بإيجاد ح (أ ∩ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∪ ب)

= ٠,٤ + ٠,٩ – ٠,٩٤ = ٠,٣٦

الآن: ح (أ) × ح (ب) = ٠,٤ × ٠,٩ = ٠,٣٦

وبما أن ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب) فإن أ، ب حدثين مستقلين.

نظرية: إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في Ω فإن:

(١) أ، ب حدثين مستقلين وإن ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب).

(٢) أ، $\overline{ب}$ حدثين مستقلين وإن ح (أ ∩ $\overline{ب}$) = ح (أ) × ح ($\overline{ب}$).

(٣) $\overline{\text{أ}}$، $\overline{\text{ب}}$ حدثين مستقلين وإن ح ($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح ($\overline{\text{أ}}$) × ح ($\overline{\text{ب}}$).

(٤) ح (أ / ب) = ح (أ).

(٥) ح (ب / أ) = ح (ب).

مثال (٢٦): تقدم طالبين لامتحان في اللغة الإنجليزية فإذا كـان احتمـال نجـاح الأول في الامتحان = ٠,٦ واحتمل نجاح الثاني في الامتحان = ٠,٧ أوجد ما يلي:

(١) احتمل نجاح الطالبين معاً.

(٢) احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

(٣) احتمال عدم نجاح الطالب الثاني.

(٤) احتمال نجاح الأول وعدم نجاح الثاني.

(٥) احتمال عدم نجاحهما معاً.

(٦) احتمال عدم نجاح الأول وعدم نجاح الثاني.

(٧) احتمال نجاح الأول علماً بأن الثاني لم ينجح.

الحل: ليكن أ: نجاح الطالب الأول في الامتحان ⇐ ح (أ) = ٠,٦.

ب: نجاح الطالب الثاني في الامتحان ⇐ ح (ب) = ٠,٧.

أ، ب حدثين مستقلين.

(١) ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب) = ٠,٦ × ٠,٧ = ٠,٤٢.

(٢) ح (أ ∪ ب) = ح (أ) × ح (ب) – ح (أ ∩ ب) = ٠,٦ + ٠,٧ – ٠,٤٢ = ٠,٨٨.

(٣) ح ($\overline{\text{ب}}$) = ١ – ح (ب) = ١ – ٠,٧ = ٠,٣.

(٤) ح (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح (أ) × ح ($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨.

(٥) ح ($\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$) = ١ – ح (أ ∩ ب) = ١ – ٠,٤٢ = ٠,٥٨.

(٦) ح (ا ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح ($\overline{\text{أ}}$) × ح ($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٤ × ٠,٣ = ٠,١٢.

(٧) ح (أ / $\overline{\text{ب}}$) = ح (أ) = ٠,٦.

(٦-٨) المتغيرات العشوائية: (Random Variables):

تعريف: المتغير العشوائي ق هو اقتران معرف على الفضاء العيـني Ω ومـداه مجموعـة جزئية من الأعداد الحقيقية.

أي أن ق: Ω ← مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (٢٧): لتكن التجربة رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الصور الظاهرة أوجد مدى ق.

الحل: الفضاء العيني لهذه التجربة = Ω = { ص ص، ص ك، ك ص، ك ك } الآن المتغير العشوائي ق يربط كل عنصر من عناصر Ω بعدد حقيقي (عدد الصور) فنلاحظ:

ص ص ← ٢ أي ق (ص ص) = ٢ (عدد الصور = ٢).

ص ك ← ١ أي ق (ص ك) = ١ (عدد الصور = ١).

ك ص ← ١ أي ق (ك ص) = ١ (عدد الصور = ١).

ك ك ← صفر أي ق (ك ك) = ١ صفر (عدد الصور = صفر).

فنلاحظ بأن مدى ق = {٢، ١، صفر}.

تعريف: ليكن ق متغيراً عشوائياً معرفاً على الفضاء العيني Ω بحيث أن مدى ق = {س$_١$، س$_٢$، ...، س$_ن$} فإن دالة التوزيع ق تحقق الشروط التالية:

(١) ح (س$_ر$) $\leq$ صفر لكل ر = ١، ٢، .. ، ن.

(٢) ح (س$_١$) + ح ($_٢$) + ... + ح (س$_ن$) = ١

نظرية: (١) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

س$_١$	س$_٢$	....	س$_ن$
ح (س$_١$)	ح (س$_٢$)		ح (س$_ن$)

(٢) التوقع للمتغير العشوائي ق = ت (ق).

= س$_١$ × ح (س$_١$) + ... + س$_ن$ × ح (س$_ن$)

= الوسط الحسابي (μ).

(٣) إذا كان أ، ب أعداد حقيقية فإن:

ت (أ ق + ب) = أ ت (ق) + ب

(٤) التباين للمتغير العشوائي ق = تبا ق = ت (ق^٢) − (ت (ق))^٢.

(٥) الانحراف المعياري لـ ق = $\sqrt{\text{تبا ق}}$.

مثال (٢٨): ألقي حجر نرد مرتين متتاليتين إذا دل المتغير العشوائي س على الفرق المطلق بين العددين الظاهرين أوجد:

(١) مدى س (٢) التوزيع الاحتمالي لـ س (٣) التوقع للمتغير س
(٤) تبا س (٥) الانحراف المعياري لـ س.

الحل: الفضاء العيني لهذه التجربة = {(١، ١) ، ... ، (٦، ٦)}.

وعدد عناصر Ω = ٣٦ زوج مرتب.

(١) مدى س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}.

(٢) قبل تكوين التوزيع الاحتمالي لـ س سنقوم بحساب الاحتمالات كالآتي:

ح (س = صفر) = ح {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)} = $\frac{٦}{٣٦}$

ح (س = ١) = ح { (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٥، ٦)، (٦، ٥)} = $\frac{١٠}{٣٦}$

ح (س = ٢) = ح { (١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٥)، (٥، ٣)، (٤، ٦)، (٦، ٤) } = $\frac{٨}{٣٦}$

ح (س = ٣) = ح { (١، ٤)، (٤، ١)، (٢، ٥)، (٥، ٢)، (٣، ٦)، (٦، ٣) } = $\frac{٦}{٣٦}$

ح (س = ٤) = ح { (١، ٥)، (٥، ١)، (٢، ٦)، (٦، ٢) } = $\frac{٤}{٣٦}$

ح (س = ٥) = ح { (١، ٦)، (٦، ١)} = $\frac{٢}{٣٦}$

∴ التوزيع الاحتمالي هو:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ح (س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

(٣) توقع س = ت (س) = ٠ × $\frac{٦}{٣٦}$ + ١ × $\frac{١٠}{٣٦}$ + ٢ × $\frac{٨}{٣٦}$ + ٣ × $\frac{٦}{٣٦}$ + ٤ × $\frac{٤}{٣٦}$ + ٥ × $\frac{٢}{٣٦}$

= $\frac{١٠+١٦+١٨+١٦+١٠}{٣٦}$ = $\frac{٧٠}{٣٦}$

(٤) تبا س = ت $(س^٢) - (ت (س))^٢$

$$ت(س^٢) = (٠)^٢ \times \frac{٦}{٣٦} + (١)^٢ \times \frac{١٠}{٣٦} + (٢)^٢ \times \frac{٨}{٣٦} + (٣)^٢ \times \frac{٦}{٣٦} + (٤)^٢ \times \frac{٤}{٣٦} + (٥)^٢ \times \frac{٢}{٣٦}$$

$$= ٠ + \frac{١٠}{٣٦} + \frac{٣٢}{٣٦} + \frac{٥٤}{٣٦} + \frac{٦٤}{٣٦} + \frac{٥٠}{٣٦} = \frac{٢١٠}{٣٦}$$

$$\therefore \text{تبا س} = \frac{٢١٠}{٣٦} - \left(\frac{٧٠}{٣٦}\right)^٢ = \frac{٢١٠}{٣٦} - \frac{٤٩٠٠}{١٢٩٦} = \frac{٢٦٦٠}{١٢٩٦}$$

(٥) الانحراف المعياري لـ س = $\sigma_{س} = \sqrt{\text{تبا س}} = \sqrt{\frac{٢٦٦٠}{١٢٩٦}}$

مثال(٢٩): يربح تاجر للبوظة في الأيام الحارة (١٠) دنانير وفي الأيام الماطرة يخسر (١٥) دينار وفي أيام الأعياد والمناسبات يربح (٢٠) دينار إذا علمت بأن نسبة الأيام الحارة (٥٠٪) والأيام الماطرة (٤٠٪) والأعياد (١٠٪) اختير إحدى الأيام بشكل عشوائي أوجد توقع ربحه في ذلك اليوم.

الحل: سنعمل أولاً على تكوين جدول التوزيع الاحتمالي:

س	١٠	١٥-	٢٠
ح (س)	٠,٥٠	٠,٤٠	٠,١٠

∴ توقع الربح = ١٠ × ٠,٥٠ + ١٥- × ٠,٤٠ + ٢٠ × ٠,١٠

= ٥ - ٦ + ٢ = دينار واحد.

(٦-٩) توزيع ذات الحدين (Binomial Distribution):

في كثير من التجارب تكون النتيجة فيها إما نجاح أو فشل ويتم تكرار مثل هذه التجربة، فمثلاً عند رمي قطعة نقد تكون النتيجة إما صورة أو كتابة وتكون نتيجة التجربة مستقلة عن نتيجة أي تجربة أخرى.

وعلى هذا فإن تجربة ذات الحدين هي كل تجربة تتمتع بالخواص التالية:

(١) نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.

(٢) نتيجة كل محاولة مستقلة عن أية محاولة أخرى.
(٣) احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وليكن (ب) فإن احتمال الفشل يساوي (١ – ب).
(٤) تجري التجربة عدداً معيناً من المرات وليكن (ن).

لنفرض س تمثل عدد النجاح في المحاولات (ن) فإن س متغير ذات الحدين والتوزيع الاحتمالي لـ س يسمى توزيع ذات الحدين.

الدالة الاحتمالية لمتغير ذات الحدين ونرمز له بالرمز

$$\text{حد (س؛ ن، ب)} = \text{ح (س = س)} = \binom{\text{ن}}{\text{س}} (\text{ب})^{\text{س}} \ (1 - \text{ب})^{\text{ن} - \text{س}}$$

حيث س = صفر، ١، ... ، ن.

مثال (٣٠): إذا كان احتمال الحصول على قطعة معيبة في إنتاج آلة (٠,٢٠) فما احتمال أن نحصل على:

(١) عدم وجود قطعة معيبة في (١٠) قطع نختارها بشكل عشوائي.
(٢) الأكثر على قطعة واحدة معيبة من بين (٢٠) قطعة نختارها بشكل عشوائي.

الحل: (١) يتضح من المعطيات بأن: ن = ١٠، ب = ٠,٢٠.

$$\text{والمطلوب: ح (س = صفر)} = \binom{10}{\text{صفر}} (0{,}20)^{\text{صفر}} \ (0{,}80)^{10} = 0{,}1073$$

(٢) ن = ٢٠، ب = ٠,٢٠.

والمطلوب: ح (س ≤ ١) = ١ – ح (س = صفر).

$$\text{ح (س = صفر)} = \binom{20}{\text{صفر}} (0{,}20)^{\text{صفر}} \ (0{,}80)^{20} = 0{,}011$$

$$\therefore \text{ح (س} \le 1) = 1 - 0{,}011 = 0{,}989$$

مثال (٣١): رميت حجر نرد منتظمة (٤) مرات ما احتمال عدم ظهور (٤) فيها؟

الحل: إن احتمال ظهور (٤) عند رمي حجر نرد مرة واحدة = $\frac{1}{6}$ وعدم الظهور = $\frac{5}{6}$

$$\therefore \text{ح (س = صفر)} = \binom{4}{\text{صفر}} \left(\frac{1}{6}\right)^{\text{صفر}} \left(\frac{5}{6}\right)^{4} = \frac{625}{1296}$$

نظرية: إذا كان س متغير ذات الحدين فإن:

(١) التوقع الرياضي لـ س = μ = ت (س) = ن × ب

(٢) تباين لـ س = ن × ب × ١ − ب

مثال (٣٢): أسرة بـها (٦) أطفـال إذا دل المتغـير العشـوائي س علـى عـدد الأطفـال الذكور في الأسرة أوجد ما يلي:

(١) احتمال أن لا يكون عند الأسرة أي طفل ذكر.

(٢) احتمال أن يكون عند الأسرة ٣ أطفال ذكور.

(٣) احتمال أن يكون عند العائلة على الأقل خمس أطفال ذكور.

(٤) توقع عدد الأطفال الذكور في العائلة.

(٥) تباين عدد الذكور في العائلة.

(٦) احتمال أن يكون عدد البنات أقل من عدد الذكور في العائلة.

الحل: يتضح بأن هذه التجربة هي تجربة ذات الحدين وأن ن =٦.

احتمال النجاح = احتمال الحصول على طفل ذكر = $\frac{١}{٢}$

احتمال الفشل = احتمال الحصول على طفل أنثى = $\frac{١}{٢}$

والدالة الاحتمالية لهذا المتغير حد (س؛ ن، ب) = $\binom{٦}{س}$ (ب)^{س} (١ − ب)$^{٦-س}$

حيث س = صفر، ١، ... ، ٦.

(١) ح (س = صفر) = $\binom{٦}{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}=\frac{١}{٦٤}$

(٢) ح (س = ٣) = $\binom{٦}{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}=\frac{٢٠}{٦٤}$

(٣) ح (س $\geq$ ٥) = ١ − ح (س > ٥) = ١ − ح (س = ٦)

= ١ − $\binom{٦}{٦}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\left(\frac{١}{٢}\right)^{صفر}=١-\frac{١}{٦٤}=\frac{٦٣}{٦٤}$

(٤) ت (س) = ن × ب = ٦ × $\frac{١}{٢}$ =٣

(٥) تبا س = ن × ب × ١ – ب = ٦ × $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

(٦) يكون عدد البنات أقل من عدد الذكور إذا كان عدد الذكور يساوي ٤ أو ٥ أو ٦.

وبالتالي فالاحتمال المطلوب = ح (س = ٤) + ح (س = ٥) + ح (س = ٦)

$$= \binom{٦}{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \binom{٦}{٥}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١} + \binom{٦}{٦}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{صفر}}$$

$$= \frac{١٥}{٦٤} + \frac{٦}{٦٤} + \frac{١}{٦٤} = \frac{٢٢}{٦٤}$$

(٦-١٠) مسائل محلولة:

مسألة (١): سحبت ورقة بطريقة عشوائية من بين (٥٠) ورقة مرقمة بالأعداد من ١ إلى ٥٠ أوجد احتمال أن يكون العدد المسحوب.

(١) يقبل القسمة على ٥ (٢) أولي (٣) ينتهي بالرقم ٢

الحل: (١) ليكن أ: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب يقبل القسمة على ٥.

وبالتالي فإن عدد العناصر أ = ١٠. وعدد عناصر Ω = ٥٠.

وعليه فإن ح (أ) = $\frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

(٢) ليكن ب: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب عدد أولي.

⇐ ب = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٩، ٣١، ٣٧، ٤١، ٤٣، ٤٧}

ح(ب) = $\frac{\text{عدد عناصر ب}}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣}{١٠}$

(٣) ليكن حـ: الحدث الذي يمثل العدد المسحوب ينتهي بالرقم ٢.

∴ حـ = {٢، ١٢، ٢٢، ٣٢، ٤٢}

∴ ح (حـ) = $\frac{٥}{٥٠} = \frac{١}{١٠}$

مسألة (٢): بفصل دراسي (١٠) طالبات، ٣ منهن عيونهن زرقاء اختيرت طالبتان بطريقة عشوائية أوجد احتمال أن يكون:

(١) عيون الطالبتين زرقاء. (٢) عيون الطالبتين ليس زرقاء.

(٣) على الأقل طالبة واحدة عينها زرقاء.

الحل: (١) الاحتمال المطلوب = $\frac{\binom{٣}{٢}\binom{٧}{٠}}{\binom{١٠}{٢}} = \frac{٣}{٤٥} = \frac{١}{١٥}$

(٢) الاحتمال المطلوب = $\frac{\binom{٣}{٠}\binom{٧}{٢}}{\binom{١٠}{٢}} = \frac{٢١}{٤٥} = \frac{٧}{١٥}$

(٣) الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون طالبة واحدة عيونها زرقاء + احتمال أن تكون طالبتين عيونهما زرقاء.

$$= \frac{\binom{٣}{١}\binom{٧}{١}}{\binom{١٠}{٢}} + \frac{\binom{٣}{٢}\binom{٧}{٠}}{\binom{١٠}{٢}} = \frac{٢١}{٤٥} + \frac{٣}{٤٥} = \frac{٢٤}{٤٥} = \frac{٨}{١٥}$$

مسألة (٣): من بين (٢٤٠) طالباً، يدرس الإنجليزية ١٢٠ طالب والإيطالية (١٠٠) طالب ويدرس اللغتين معاً (٤٠) طالب اختير طالب بشكل عشوائي أوجد احتمال أن يكون هذا الطالب:

(١) يدرس الإنجليزية أو الإيطالية.

(٢) أن لا يكون يدرس الإنجليزية ولا الإيطالية.

الحل: ليكن أ: طالب يدرس الإنجليزية ⇐ ح (أ) = $\frac{١٢٠}{٢٤٠} = \frac{١}{٢}$

ب: طالب يدرس الإيطالية ⇐ ح (ب) = $\frac{١٠٠}{٢٤٠} = \frac{٥}{١٢}$

أ ∩ ب: طالب يدرس اللغتين معاً ⇐ ح (أ ∩ ب) = $\frac{٤٠}{٢٤٠} = \frac{١}{٦}$

(١) ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

$$= \frac{١}{٢} + \frac{٥}{١٢} - \frac{١}{٦} = \frac{٦+٥-٢}{١٢} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

$(٢)\ \text{ح}(\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}) = ١ - \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

مسألة (٤): إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث

$\text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \frac{٧}{٨}$ ، $\text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٤}$، $\text{ح}(\overline{\text{أ}}) = \frac{٥}{٨}$ أوجد:

(١) ح (أ) (٢) ح (ب) (٣) ح (أ ∩ ب̄)

الحل: $(١)\ \text{ح}(\text{أ}) = ١ - \text{ح}(\overline{\text{أ}}) = ١ - \frac{٥}{٨} = \frac{٣}{٨}$

$(٢)\ \text{ح}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$\frac{٧}{٨} = \frac{٣}{٨} + \text{ح}(\text{ب}) - \frac{١}{٤}$

$\therefore \text{ح}(\text{ب}) = \frac{٧}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

$(٣)\ \text{ح}(\text{أ} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{٣}{٨} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٨}$

مسألة (٤): يلعب أريك وبتير وجوني ومارك في ورق اللعب (الشدة) أخذ كل منهم (١٣) ورقة من الشدة.

(١) إذا لم يكن عند بتير أي أس فما هو الاحتمال أن يكون عند زميل بتير ٢ أس بالضبط.

(٢) إذا كان عند اريك وبتير معاً ٩ ورقات بستوني فأوجد الاحتمال أن يكون عند جوني ومارك ورقتي بستوني.

الحل: (١) توجد (٣٩) ورقة من بينها (٤) أس موزعة بين بتير وجوني ومارك وتوجد $\binom{٣٩}{١٣}$ طريقة يمكن أن يأخذ بها جوني (١٣) ورقة من بين ٣٩ ورقة ويوجد $\binom{٤}{٢}$ طريقة يمكن أن يأخذ جوني بها (٢) أس من بين (٤) أس و $\binom{٣٥}{١١}$ طريقة يمكن أن يأخذ بها ١١ ورقة من بين (٣٥) ورقة ليس منها أس وبالتالي فإن الاحتمال المطلوب:

$$= \frac{\binom{٤}{٢}\binom{٣٥}{١١}}{\binom{٣٩}{١٣}} = \frac{٦ \times \frac{\cancel{٣٥!}}{١١!\,٢٤!}}{\frac{٣٩ \times ٣٨ \times ٣٧ \times ٣٦ \times \cancel{٣٥!}}{١٣!\,٢٦!}}$$

$$= \frac{٢٦!\times ١٣!\times ٦}{٢٤!\times ١١!\times ٣٧\times ٣٨\times ٣٩\times ٣٦} = \frac{٢٥\times ٢٦\times ١٢\times ١٣\times ٦}{٣٦\times ٣٧\times ٣٨\times ٣٩}$$

$$= \frac{٦٠٨٤٠٠}{١٩٧٤٠٢٤} = \frac{٦٥٠}{٢١٠٩}$$

(٢) توجد (٢٦) ورقة من بينها (٤) ورقات بستوني موزعة بين جوني ومارك. توجد $\binom{٢٦}{١٣}$ طريقة يمكن أن يأخذ بها جوني مثلاً (١٣) ورقة وتوجد $\binom{٤}{٢}$ طريقة يمكن أن يأخذ بها جوني ورقتي بستوني من بين (٤) ورقات بستوني و $\binom{٢٢}{١١}$ طريقة يمكنه أن يأخذ ١١ ورقة لا يوجد بها أي ورقة بستوني من بين (٢٢) ورقة إذاً

فالاحتمال المطلوب يساوي $\frac{\binom{٢٢}{١١}\binom{٤}{٢}}{\binom{٢٦}{١٣}} = \frac{٢٣٤}{٥٧٥}$.

مسألة (٥): إذا كان ح (أ) = $\frac{٣}{٤}$، ح (حـ / أ) = $\frac{١}{٣}$، ح (حـ / $\overline{\text{أ}}$) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:

(١) ح (حـ) (٢) ح (أ / حـ).

الحل: (١) ح (حـ / أ) = $\frac{\text{ح}(\text{حـ} \cap \text{أ})}{\text{ح}(\text{أ})}$ $\Leftarrow$ ح (حـ $\cap$ أ) = ح (حـ / أ) . ح (أ)

$$= \frac{١}{٣}\times\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{ح}(\text{حـ} / \overline{\text{أ}}) = \frac{\text{ح}(\text{حـ} \cap \overline{\text{أ}})}{\text{ح}(\overline{\text{أ}})} = \frac{\text{ح}(\text{حـ}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{حـ})}{١ - \text{ح}(\text{أ})}$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{\text{ح}(\text{حـ}) - \frac{١}{٤}}{١ - \frac{٣}{٤}} = \frac{\text{ح}(\text{حـ}) - \frac{١}{٤}}{\frac{١}{٤}}$$

$$\therefore \text{ح}(\text{حـ}) = \frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٥}{١٦}$$

(٢) $ح(أ / حـ) = \frac{ح(أ \cap حـ)}{ح(حـ)} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{٥}{١٦}} = \frac{٤}{٥}$

مسألة (٦): وجد أن (٠,٤) من المراجعين في عيادة ما يشكون من ارتفاع في ضغط الدم وأن (٠,٢) من المراجعين مصابون بمرض في الكبد وأن (٠,١) يشكون من المرضين معاً. ما احتمال أن أحد المراجعين يشكو من أحد المرضين على الأقل هل ارتفاع ضغط الدم ومرض الكبد مستقلان؟

الحل: أ: مريض يعاني من ارتفاع في ضغط الدم ⇐ ح (أ) = ٠,٤

ب: مريض يعاني من مرض في الكبد ⇐ ح (ب) = ٠,٢

أ ∩ ب: مريض يعاني من المرضين معاً ⇐ ح (أ ∩ ب) = ٠,١

المطلوب: ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب) = ٠,٤ + ٠,٢ − ٠,١ = ٠,٥

بما أن ح (أ ∩ ب) = ٠,١ ≠ ح (أ) × ح (ب) فإن المرضين ليس مستقلان.

مسألة (٧): ترسل الإشارات اللاسلكية على شكل نقاط وخطوط حيث عدد النقاط = $\frac{٣}{٤}$ عدد الخطوط وبسبب الأخطاء فإن النقطة تصبح خطاً باحتمال $\frac{٢}{٣}$ والخط يصبح نقطة باحتمال $\frac{١}{٤}$.

(١) ما احتمال استلام إشارة نقطة؟

(٢) إذا استلمت إشارة نقطة فما احتمال أنها أرسلت نقطة؟

الحل: لنفترض بأن عدد الخطوط = س ، عدد النقاط = $\frac{٣}{٤}$ س

∴ س + $\frac{٣}{٤}$ س = ١ ⇐ $\frac{٧}{٤}$ س = ١ ⇐ س = $\frac{٤}{٧}$

لتكن أ: إرسال إشارة على شكل نقطة ⇐ ح (أ) = $\frac{٣}{٧}$

ب: إرسال إشارة على شكل خط ⇐ ح (ب) = $\frac{٤}{٧}$

ى: استلام إشارة نقطة.

$$\text{ح}(\text{ى}/\text{أ}) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad \text{ح}(\text{ى}/\text{ب}) = \frac{١}{٤}$$

(١) $\text{ح}(\text{ى}) = \text{ح}(\text{أ}).\text{ح}(\text{ى}/\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}).\text{ح}(\text{ى}/\text{ب}) = \frac{٣}{٧}\times\frac{١}{٣}+\frac{٤}{٧}\times\frac{١}{٤}=\frac{٢}{٧}$

(٢) $\text{ح}(\text{أ}/\text{ى}) = \frac{\text{ح}(\text{أ}).\text{ح}(\text{ى}/\text{أ})}{\text{ح}(\text{ى})} = \frac{\frac{٣}{٧}\times\frac{١}{٣}}{\frac{٢}{٧}} = \frac{١}{٢}$

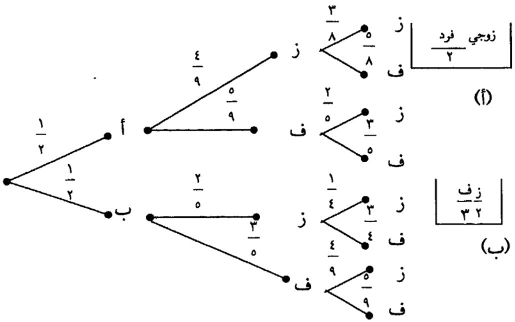
مسألة (٨): بالصندوق أ (٩) ورقات مرقمة من ١ إلى ٩ وبالصندوق ب ٥ ورقات مرقمة من ١ إلى ٥ اختير صندوق بشكل عشوائي ثم سحبت منه ورقة إذا كان الرقم المسحوب زوجياً فإننا نسحب ورقة أخرى من نفس الصندوق وإذا كان الرقم المسحوب فردياً فإننا نسحب ورقة من الصندوق الآخر.

(١) ما هو احتمال أن يكون الرقمان المسحوبان زوجيين؟

(٢) إذا كان الرقمان المسحوبان زوجيان فما هو احتمال أن يكون الصندوق أ هو المختار.

(٣) ما هو احتمال أن يكون الرقمان المسحوبان فرديين؟

الحل: نرسم أولاً شجرة الاحتمال التي تمثل الحل كالتالي:



(١) هنالك مساران يعطيان عددان زوجيان وبالتالي فالاحتمال المطلوب يساوي:

$$\frac{١}{٢}\times\frac{٤}{٩}\times\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٥}\times\frac{١}{٤}=\frac{١}{١٢}+\frac{١}{٢٠}=\frac{٢}{١٥}$$

(٢) باستخدام نظرية بيز فالمطلوب ح (أ/ ز ز) :

$$=\frac{ح(أ)\,.\,ح\left(زز/أ\right)}{ح(زز)}=\frac{\frac{١}{٢}\times\frac{٤}{٩}\times\frac{٣}{٨}}{\frac{٢}{١٥}}=\frac{\frac{١}{١٢}}{\frac{٢}{١٥}}=\frac{٥}{٨}$$

(٣) ح (ف ف) $=\frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٩}\times\frac{٣}{٥}+\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٥}\times\frac{٥}{٩}$

$$=\frac{١}{٦}+\frac{١}{٦}=\frac{٢}{٦}=\frac{١}{٣}$$

مسألة (٩): بفرض أن أ و ب حدثين مستقلين في Ω وأن

ح (أ) = $\frac{١}{٢}$، ح (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ أوجد ما يلي:

(١) ح (ب).

(٢) ح (أ / ب).

(٣) ح ($\bar{ب}$ / أ).

الحل: بما أن أ و ب مستقلان فإن ح (أ ∩ ب) = ح (أ) . ح (ب)

⇐ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ) . ح (ب)

∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) . ح ($\bar{أ}$)

$$\frac{٢}{٣}=\frac{١}{٣}+ح(ب)\times\frac{٢}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{٣}\times ح(ب)=\frac{١}{٣}\Leftarrow ح(ب)=\frac{١}{٢}$$

(٢) ح (أ / ب) = ح (أ) = $\frac{١}{٢}$

(٣) ح ($\bar{ب}$ / أ) = ح ($\bar{ب}$) = $\frac{١}{٢}$

مسألة (١٠): صندوق يحتوي على أربع كرات حمراء وخمس كرات صفراء سحبت عينة مكونة من ثلاثة كرات على التوالي مع الإرجاع إذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات الحمراء في العينة أوجد ما يلي:

(١) احتمال عدم الحصول على أي كرة حمراء في العينة.

(٢) احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء.

(٣) احتمال الحصول على كرتين حمراوين.

(٤) احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء.

(٥) أوجد مدى المتغير س.

(٦) أوجد التوزيع الاحتمالي لـ س.

(٧) التوقع لـ س.

(٨) التباين لـ س.

الحل: بما أن السحب مع الإرجاع فإن التجربة تجربة ذات الحدين حيث ن = ٣، ب = $\frac{٤}{٩}$.

(١) ح (س = ٠) = $\binom{٣}{٠}\left(\frac{٤}{٩}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٩}\right)^{٣} = \frac{١٢٥}{٧٢٩}$

(٢) ح (س = ١) = $\binom{٣}{١}\left(\frac{٤}{٩}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٩}\right)^{٢} = ٣ \times \frac{٤}{٩} \times \frac{٢٥}{٨١} = \frac{٣٠٠}{٧٢٩}$

(٣) ح (س = ٢) = $\binom{٣}{٢}\left(\frac{٤}{٩}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٩}\right)^{١} = ٣ \times \frac{١٦}{٨١} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٢٤٠}{٧٢٩}$

(٤) ح (س = ٣) = $\binom{٣}{٣}\left(\frac{٤}{٩}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٩}\right)^{٠} = \frac{٦٤}{٧٢٩}$

(٥) مدى س = { صفر، ١، ٢، ٣}.

(٦) التوزيع الاحتمالي لـ س هو:

س	٠	١	٢	٣
ح (س)	$\frac{١٢٥}{٧٢٩}$	$\frac{٣٠٠}{٧٢٩}$	$\frac{٢٤٠}{٧٢٩}$	$\frac{٦٤}{٧٢٩}$

(٧) التوقع لـ س = ت (س) = ن × ب

$$= ٣ \times \frac{٤}{٩} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$$

(٨) تبا س = ن × ب × ١ − ب

$$= ٣ \times \frac{٤}{٩} = \frac{٥}{٩} = \frac{٢٠}{٢٧}$$

مسألة (١١): إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه {١، ٢، ... ، ١٠} بحيث ح (س = س)= $\frac{س}{أ}$ فما قيمة أ.

الحل: بما أن ح (س = ١) + ح (س =٢) + ... + ح (س = ١٠) = ١

فإن: $\frac{١}{أ} + \frac{٢}{أ} + \frac{٣}{أ} + ... + \frac{١٠}{أ} = ١$

$$\frac{١}{أ} [١ + ٢ + ٣ + ... + ١٠] = ١$$

$$\frac{١}{أ} \times \frac{١٠}{٢} (١٠ + ١) = ١$$

$$\therefore \frac{١}{أ} \times ٥٥ = ١ \Leftarrow أ = ٥٥$$

ملاحظة: استعملنا [١ + ٢ + ... + ن = $\frac{ن}{٢}$ (ن + ١)]

تمارين الوحدة السادسة

س١: إذا كان ح (أ) = $\frac{1}{2}$، ح (أ ∩ ب) = $\frac{1}{3}$، ح (ب / $\overline{أ}$) = $\frac{1}{4}$ أوجد :

(١) ح (ب) (٤) ح (أ ∩ $\overline{ب}$)

(٢) ح (أ ∪ ب) (٥) ح (أ / $\overline{ب}$)

(٣) ح (أ / ب) (٦) ح ($\overline{أ}$/$\overline{ب}$)

س٢: إذا كان ح(أ / ب) = $\frac{1}{3}$، ح (ب / أ) = $\frac{1}{2}$ ، ح (أ ∩ ب) = $\frac{1}{5}$ أوجد ح (أ ∪ ب).

س٣: إذا كان أ ⊃ب أوجد ح (ب / أ).

س٤: إذا كان أ، ب حادثين في Ω بحيث أن ح (أ) = ٠,٥، ح (ب) = ٠,٦، ح (أ ∪ ب) = ٠,٨ فهل أ، ب مستقلان؟

س٥: إذا كان أ، ب حادثين مستقلين في Ω بحيث أن ح (أ) = ٠,١، ح (ب) = ٠,٤ أوجد ما يلي:

(١) ح (أ ∩ ب) (٤) ح (ب / أ)

(٢) ح (أ ∪ ب) (٥) ح (أ – ب)

(٣) ح (أ / ب) (٦) ح (ب – أ)

س٦: في تجربة رمي حجري نرد الأول أحمر والثاني اخضر أجب عن الأسئلة التالية:

(١) ما احتمال أن يزيد المجموع عن (١٠) علماً بأن العدد الظاهر على وجه الحجر الأحمر هو ٥؟

(٢) ما احتمال أن يكون المجموع أقل من (٦) علماً بأن العدد الظاهر على وجه الحجر الأحمر هو العدد ٢؟

س٧: شعبة فيها ٦ طالبات و ١٠ طلاب إذا اختيرت بطريقة عشوائية لجنة مكونة من ثلاثة من هذه الشعبة فأوجد احتمال أن يتم:

(١) اختيار ثلاثة طلاب في اللجنة (٢) اختيار طالبين بالضبط.

(٣) اختيار طالب واحد على الأقل (٤) اختيار طالبتين بالضبط.

س٨: صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور الأعداد الزوجية متساوي واحتمال ظهور الأعداد الفردية متساوي واحتمال ظهور العدد الزوجي ثلاثة أضعاف احتمال ظهور العدد الفردي فأوجد ما يلي:

(١) احتمال ظهور العدد الزوجي (٢) احتمال ظهور عدد أولي.

س٩: ألقي حجر نرد، إذا كان العدد الناتج أولي فما هو احتمال أن يكون فردي.

س١٠: في مدينة ما إذا علمت بأن ٤٠٪ من السكان عيونهم سوداء و ٣٠٪ شعرهم أشقر و ١٥٪ لهم عيون سوداء وشعر أشقر اختير شخص من السكان بشكل عشوائي أوجد ما يلي:

(١) إذا كان عيونه سوداء فما احتمال أن يكون شعره أشقر.

(٢) إذا كان عيونه ليست سوداء فما احتمال أن يكون شعره أشقر.

س١١: لدينا صندوقان أ، ب بالصندوق أ خمس كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء والصندوق ب كرة حمراء وكرتان من اللون الأبيض. ألقي حجر نرد فإذا ظهر الرقم ٣ أو ٦ تسحب كرة من ب وتوضع في أ ثم تسحب كرة من أ وبخلاف ذلك تسحب كرة من أ وتوضع في ب ثم تسحب كرة من ب.

(١) ما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأحمر؟

(٢) ما هو احتمال أن تكون الكرتان من اللون الأبيض؟

س١٢: إذا كان أ، ب حدثين في Ω بحيث ح (أ) = $\frac{١}{٤}$، ح (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$، ح (ب) = س أوجد س.

(١) إذا كان أ، ب حدثين منفصلين (٢) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين.

(٣) إذا كان أ ⊃ ب.

س١٣: صندوق أ به ٥ كرات حمراء و ٣ بيضاء وصندوق ب به كرتان من اللون الأحمر و ٦ كرات بيضاء.

(١) إذا سحبت كرة من كل صندوق فما هو احتمال أن تكونا من نفس اللون.

(٢) إذا سحبت كرتان من كل صنـدوق فمـا هـو احتمـال أن تكـون الكـرات الأربع من نفس اللون.

س١٤: موظفان في سكرتارية مكتب نسـخ الخطابـات علـى الآلـة الكاتبـة، فـإذا كـان الموظف الأول ينسخ ٨٠٪ من الخطابات، وكانت ٩٠٪ من خطاباته بـدون أخطـاء وإذا كان الموظف الثاني ينسخ ٢٠٪ من خطابات المكتب وأن ٥٠٪ مـن خطاباتـه بدون أخطاء، فإذا سحب خطاب من الخطابان المطبوعة في هذا المكتب فأوجد:

(١) احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.

(٢) احتمال أن يكون الخطاب قد طبعه الموظف الأول علماً بأن الخطاب به أخطاء.

س١٥: يحتوي صندوق على (٨) مصابيح اثنتان منها معيبة إذا كانت التجربة هي اختيار عينة من أربعة مصابيح مع الإرجاع ودل المتغير العشوائي س على عدد المصـابيح التالفة في العينة. كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س وأوجد توقعه.

س١٦: احتمال أن يصيب شخص هدفاً يساوي $\left(\frac{١}{٣}\right)$ فإذا أطلق شخص (٥) عيـارات نارية على الهدف أوجد ما يلي:

(١) احتمال عدم إصابة الهدف (٢) احتمال إصابة الهدف (٥) مرات.

(٣) إصابة الهدف مرتان على الأكثر (٤) إصابة الهدف مرة على الأقل.

(٥) توقع إصابة الهدف (٦) التباين لإصابة الهدف.

س١٧: أوجد ن، ب لمتغير ذات الحدين إذا كان $\mu = ٥$، تبا س $= \frac{١٥}{٤}$.

س١٨: أوجد قيمة أ، ب لتجعل الجدول التالي يمثل توزيعاً احتمالياً.

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ح (س)	أ	٠,٢	٠,١	صفر	ب	٠,١

علماً بأن ت (س) = ٤.

س١٩: إذا كان ت (س) = ٣ أوجد ت (٢س – ٦)

الوحدة السابعة

٧

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

تعريفه.

(٧-١) خواص التوزيع الطبيعي.

(٧-٢) التوزيع الطبيعي المعياري.

(٧-٢-١) كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

(٧-٢-٢) كيفية استخراج العلامة المعيارية (ز) إذا علمت المساحة.

تمارين الوحدة.

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

التوزيع الطبيعي (الزائي): Normal Distribution:

تعريفه: هو توزيع اقتران كثافته الاحتمالية متصل ويُعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{س}-\mu}{\sigma}\right)^{2}} ،\quad -\infty < \text{س} < \infty$$

حيث μ هي معدل التوزيع، σ^2 هي تباينه.

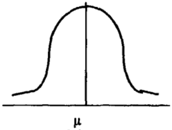
هـ = ٢,٧١٨٢٨٠٠٠٠، π = ٣,١٤١٥٩٠٠٠٠٠

واحتمال الحادث : س تقع بين النقطتين أ، ب يساوي:

$$\text{ح}(\text{أ} < \text{س} < \text{ب}) = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}.$$

(٧-١) خواص التوزيع الطبيعي:

(١) التوزيع الطبيعي متماثل حول العمود المقـام علـى الوسط μ وشكله يشبه الجرس. انظر الشكل (١).



الشكل (١)

(٢) للتوزيع الطبيعي قمة واحدة وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط.

(٣) يتقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما تقترب س من ∞ أو −∞.

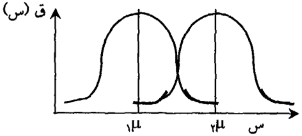
(٤) المساحة الواقعة تحت منحنى التوزيع وفوق محور السينات تساوي وحدة واحدة.

(٥) الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.

(٦) المساحة على يمين الوسط = المساحة على يسار الوسط = ٠,٥.

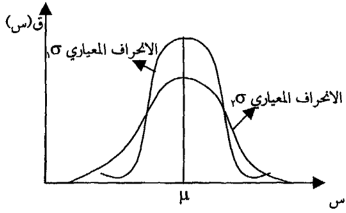
(٧) إذا تحركت μ إلى اليمين أو اليسار ينتقل مركز التوزيع ولا يتغير شكل التوزيع، أما إذا تغيرت σ وبقيت μ نفسها فإن تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما صغرت σ . أما إذا تغيرت μ و σ فإن مركز التوزيع يتغير وتباعد منحناه حول المركز يتغير كذلك. والأشكال التالية تظهر لنا تأثر المنحنى بالختلاف μ و σ .

[الشكل (٢) يظهر لنا إذا تغير الوسط الحسابي فإن منحنى التوزيع يتحرك يميناً أو يساراً ولكن شكل التوزيع لا يتغير].



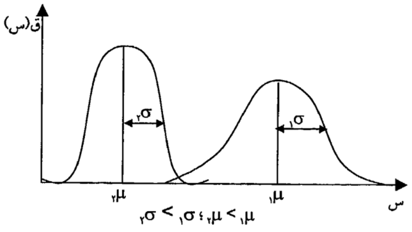
الشكل (٢)

[الشكل (٣) يظهر لنا إذا تغير الانحراف المعياري وبقي الوسط ثابتاً فإن تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما صغرت σ].



$\sigma_1 > \sigma_2$

الشكل (٣)



[الشكل (٤) يظهر لنا إذا تغيرت σ و μ فإن مركز التوزيع يتغير وتباعد منحناه حول المركز يتغير كذلك].

الشكل (٤)

(٧-٢) التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

يعرَّف التوزيع الطبيعي المعياري بأنه التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه ١، أي أن المتغير العشوائي (ز) يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان توزيع ز التوزيع الطبيعي ذا الوسط μ = صفر والتباين σ^2 = ١ ونعبر عنه بالرمز ز : ط (صفر، ١) وإذا كان س متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والتباين σ^2 فيمكن تحويل س إلى متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري باستخدام العلاقة:

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}.$$

إذ أن كل قيمة لـ س تقابلها قيمة لـ ز.

(٧-٢-١) كيفية استخراج المساحات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

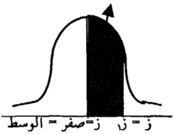
بما أن الوسط μ والتباين σ^2 يحددان التوزيع الطبيعي فإن المساحة على أي فترة تعتمد على μ و σ^2 وبالتالي لا يمكن وضع جداول لجميع قيم μ و σ^2 ولحساب المساحات تحت التوزيع الطبيعي سنقوم بتحويله إلى توزيع طبيعي معياري. ومن ثم نجد المساحة المطلوبة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. وسنستخدم الجدول

[الموجود في نهاية الكتاب] الذي يعطي المساحة على يمين الوسط (ز = صفر) ويسار ز الموجبة لاحظ الشكل (٥).

أما عن كيفية إيجاد المساحة باستخدام الجدول سنعمل على تقسيمها إلى حالات:

الحالة الأولى: الحالة القياسية (الجدولية):

المساحة الواقعة بين الوسط (ز = صفر) وقيمة (ز = ز١) = ح (صفر < ز < ز١) كما هو واضح في الشكل (٥) [مساحة المنطقة المظللة].



الشكل (٥)

ملاحظة: ١) سنرمز للمساحة الجدولية بالرمز ح (ز١)

٢) الجدول جانباً يمثل جزءاً من الجدول المستخدم في استخراج المساحات.

ز	٠,٠٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠.٠	0.0000	٠,٠٠٤٠	...							
٠,١										٠,٠٣٥٩
.										
:										
١,٠	٠,٣٤١٣					٠,٣٥٣١				
٥										
:										
٣.٣										

مثال (١): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (٠,٠٩).

(٢) ح (١,٠٥).

(٣) ح (٣,٣١).

الحل:

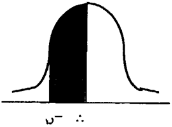
(١) المطلوب هنا المساحة الجدولية المحصورة بين (ز = صفر، ز = ٠,٠٩) وبالبحث في الجدول في السطر الأول وتحت (٠,٠٩) نجد بأن ح (٠,٠٩) = ٠,٠٣٥٩.

(٢) لإيجاد المساحة الجدولية تحت (١,٠٥) نمد خط أفقي من (١,٠) وإنزال عمود من (٠,٠٥) كما هو واضح (مرسوم) في الجدول فتكون المساحة المطلوبة هي نقطة التقاطع بين الخطين وبالتالي نجد بأن ح (١,٠٥) = ٠,٣٥٣١.

(٣) كما فعلنا في (٢) نجد أن ح (٣,٣١) = ٠,٤٩٩٥.

الحالة الثانية:

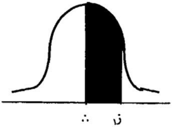
المساحة الواقعة على يسار الوسط (ز = صفر) ويمين (ز = −ز١) = ح (−ز١ < ز < صفر) [المساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٧)].



الشكل (٧)

نتيجة التماثل نلاحظ بأن هذه المساحة تساوي ح (ز١).

ملاحظة: مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٧) تساوي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٨) وسنرمز لها بالرمز ح (−ز١).



الشكل (٨)

مثال (٢): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (−١).

(٢) ح (−٢).

الحل:

باستخدام الحالة الثانية نلاحظ أن:

(١) ح (-١) = ح (١) = ٠,٣٤١٣.

(٢) ح (-٢) = ح (٢) = ٠,٤٧٧٢.

الحالة الثالثة:

المساحة الواقعة بين قيمتين معيـاريتين موجبتـين = ح (ز$_{١}$ < ز < ز$_{٢}$) والمسـاحة المطلوبـة هـي مسـاحة المنطقة المظللة في الشكل (٩).

الشكل (٩)

المساحة المطلوبة = المساحة الواقعة بـين (صفـر، ز$_{٢}$) − المسـاحة الواقعـة بـين (صفر، ز$_{١}$).

= ح (ز$_{٢}$) − ح (ز$_{١}$)

مثال (٣): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (٠,١ < ز < ٠,٦)　　　　(٢) ح (١ < ز < ٢)

الحل:

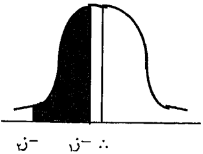
(١) ح(٠,١< ز < ٠,٦) = ح (٠,٦) − ح (٠,١)

= ٠,٢٢٥٩ − ٠,٠٣٩٨ = ٠,١٨٦١

(٢) ح(١ < ز < ٢) = ح (٢) − ح (١)

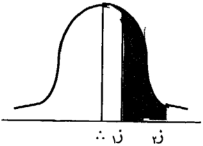
= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٣٥٩

الحالة الرابعة: المساحة الواقعة بين قيمتين معياريتين سالبتين = ح (−ز$_{٢}$ < ز < −ز$_{١}$) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (١٠) باستخدام خواص التوزيع الطبيعي فإن هذه المساحة تساوي المساحة الواقعة بين القيمتين ز$_{١}$، ز$_{٢}$ [نتيجة التماثل].



الشكل (١٠)

ملاحظة: مساحة المنطقة المظللة في الشكل (١٠) تساوي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (١١).



الشكل (١١)

مثال (٤): أوجد المساحة التالية:

(١) ح (−٠,٦ < ز < −٠,١)   (٢) ح (−٢ < ز < −١)

الحل: (١) ح (−٠.٦ < ز < −٠,١) = ح (٠,١ < ز < ٠,٦)

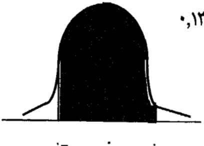
= ح (٠,٦) − ح (٠,١) = ٠,١٨٦١

(٢) ح (−٢ < ز < −١) = ح (−٢) − ح (−١)

= ح (٢) − ح (١) = ٠,١٣٥٩

الحالة الخامسة:

المساحة الواقعة بين (ز = −ز$_{١}$ و ز = ز$_{٢}$) = ح (−ز$_{١}$ < ز < ز$_{٢}$) وهذه مساحة المنطقة المظللة في الشكل(١٢).



الشكل (١٢)

ح (-ز$_1$ > ز > ز$_2$) = ح (ز$_2$) + ح (ز$_1$)

مثال(٥): أوجد المساحة المطلوبة:

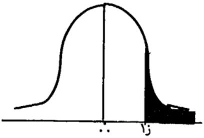
(١) ح (-١ > ز> ٢)   (٢) ح (-١,٣ > ز > ٢,٣٣)

الحل:

(١) ح (-١ > ز > ٢) = ح (٢) + ح (١) = ٠,٤٧٧٢ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨١٨٥

(٢) ح (-١,٣ > ز> ٢,٣٣) = ح(٢,٣٣) + ح (١,٣)

= ٠,٤٩٠١ + ٠,٤٠٣٢ = ٠,٨٩٣٣



الشكل(١٣)

الحالة السادسة: المساحة الواقعة على يمين ز الموجبة = ح (ز > ز$_1$) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل(١٣).

∴ ح (ز > ز$_1$)= المساحة على يمين الوسط - المساحة الجدولية تحت ز$_1$

= ٠,٥٠٠٠ - ح (ز$_1$)

مثال(٦): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (ز > ١)   (٢) ح (ز > ٢)

الحل:

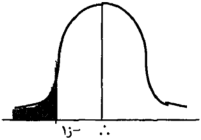
(١) ح (ز > ١) = ٠,٥٠٠٠ - ح (١) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

(٢) ح (ز > ٢) = ٠,٥٠٠٠ - ح (٢) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

الحالة السابعة:

المساحة الواقعة على يسار (ز =-ز$_{١}$) = ح (ز < -ز$_{١}$)

والمساحة المطلوبة هـي مساحة المنطقـة المظللة في الشكل (١٤).



الشكل (14)

نتيجة التماثل:

ح (ز < -ز$_{١}$) = ح (ز > ز$_{١}$)

= المساحة على يمين (ز$_{١}$).

مثال (٧): أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

(١) ح (ز < -١)   (٢) ح (ز < -٢).

الحل:

(١) ح (ز < -١) = ح (ز > ١) = ٠,٥٠٠٠ - ح (١)

= ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

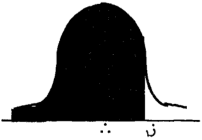
(٢) ح (ز < -٢) = ح (ز > ٢) = ٠,٥٠٠٠ - ح (٢)

= ٠,٥٠٠٠ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

الحالة الثامنة:

المساحة الواقعة على يسـار (ز = ز$_{١}$) = ح(ز < ز$_{١}$) والمسـاحة المطلوبـة هـي مسـاحة المنطقة المظللة في الشكل (١٥).

ح (ز < ز$_{١}$) = ح (ز$_{١}$) + ٠,٥٠٠٠



الشكل (١٥)

مثال (٨): أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

(١) ح (ز < ١)　　　　(٢) ح (ز < ٢)

الحل:

(١) ح (ز < ١) = ح (١) + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٣٤١٣ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٨٤١٣

(٢) ح (ز < ٢) = ح (٢) + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٤٧٧٢ + ٠,٥٠٠٠ = ٠,٩٧٧٢

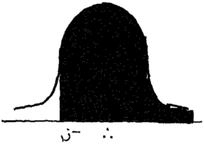
الحالة التاسعة:

المساحة الواقعة على يمين (ز = −$ز_{١}$) = ح (ز > −$ز_{١}$) والمساحة المطلوبة هي مساحة المنطقة المظللة في الشكل (١٦).

نتيجة التماثل:

المساحة الواقعة على يمين (ز = −$ز_{١}$) = المساحة الواقعة على يسار (ز = $ز_{١}$) .

ح (ز > −$ز_{١}$) = ح (ز < $ز_{١}$)



الشكل (١٦)

مثال (٩): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (ز > −١)　　　　(٢) ح (ز > −١,٩٦)

الحل:

(١) ح (ز > −١) = ح (ز < ١) = ٠,٥٠٠٠ + ح (١).

= ٠,٥٠٠٠ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

(٢) ح (ز > −١,٩٦) = ٠.٥٠٠٠ + ح (−١,٩٦)

= ٠,٥٠٠٠ + ح (١,٩٦)

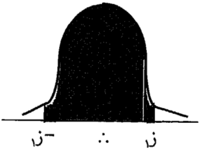
= ٠,٥٠٠٠ + ٠,٤٧٥٠ = ٠,٩٧٥٠

الحالة العاشرة: المساحة الواقعة بين (-ز١ ، ز١) = ح (-ز١< ز < ز١)

= ح (|ز| < ز١) وهـــي مســـاحة المنطقة المظللة في الشكل (١٧).

=ح (|ز| < ز١)

= ٢ × ح (ز١)



الشكل (١٧)

مثال (١٠): أوجد المساحة المطلوبة:

(١) ح (|ز| < ٠,٥)　　　　(٢) ح (|ز| < ١)

الحل:

(١) ح (|ز| < ٠,٥) = ٢ × ح (٠,٥) = ٢ × ٠,١٩١٥ = ٠,٣٨٣٠

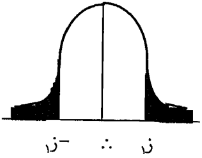
(٢) ح (|ز| < ١) = ٢ × ح (١) = ٢ × ٠,٣٤١٣= ٠,٦٨٢٦

الحالة الحادية عشرة:

المساحة الواقعة خارج (-ز١ ، ز١) = ح (|ز| > ز١)

والمســاحة المطلوبــة هــي مســاحة المنطقة المظللة في الشكل (١٨).

ح (|ز| > ز١) = ١- ٢ × ح (ز١)



مثال (١١): أوجد المساحة المطلوبة فيما يلي:

(١) ح (|ز| > ٠,٥)　　　　(٢) ح (|ز| > ١)

الحل:

(١) ح (|ز| > ٠,٥) = ١ - ٢ × ح (٠,٥) = ١- ٠,٣٨٣٠ = ٠,٦١٧٠

(٢) ح (|ز| > ١) = ١ − ٢ × ح (١) = ١− ٠,٦٨٢٦ = ٠,٣١٧٤

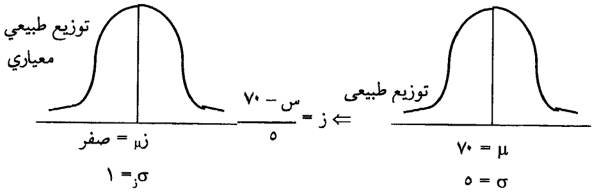
مثال (١٢): إذا كانت س: ط (٧٠، ٢٥) أوجد:

(١) ح (س > ٧٣) (٢) ح (٦٥ < س < ٧٢)

(٣) ح (س < ٦٩) (٤) ح (س > ٨٠)

الحل: بما أن المتغير س يخضع لتوزيــع طبيعــي وســطه (٧٠) وتباينــه (٢٥) فإنــه يجــب تحويل المتغير س إلى متغير طبيعي معياري (ز) حسب قانون العلامة المعيارية:

$$\text{ز} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \frac{\text{س} - ٧٠}{٥}$$



$$(١)\ \text{ح}\ (\text{س} > ٧٣) = \text{ح}\left(\frac{\text{س} - ٧٠}{٥} > \frac{٧٣ - ٧٠}{٥}\right) = \text{ح}\ (\text{ز} > ٠,٦)$$

= ٠,٥٠٠٠ − ح (٠,٦) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,٢٢٥٧ = ٠,٢٧٤٣

ملاحظة على الفرع (١): تم تحويل العلامة الخام (٧٣) إلى علامة معياريــة (٠,٦) ومن ثم استخرجت المساحة الواقعة على يمين (٠,٦).

$$(٢)\ \text{ح}\ (٦٥ < \text{س} < ٧٢) = \text{ح}\left(\frac{٦٥ - ٧٠}{٥} < \frac{\text{س} - ٧٠}{٥} < \frac{٧٢ - ٧٠}{٥}\right)$$

= ح (−١ < ز < ٠,٤)

= ح (١) + ح (٠,٤)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,١٥٥٤ = ٠,٤٩٦٧

(٣) ح (س < ٦٩) = ح $\left(\frac{\text{س}-٧٠}{٥} < \frac{٦٩-٧٠}{٥}\right)$ = ح (ز < −٠,٢)

= ٠,٥٠٠٠ − ح (٠,٢) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,٠٧٩٣ = ٠,٤٢٠٧

(٤) ح (س > ٨٠) = ح $\left(\frac{\text{س}-٧٠}{٥} > \frac{٨٠-٧٠}{٥}\right)$ = ح (ز > ٢)

= ٠,٥٠٠٠ − ح (٢) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

مثال (١٣): إذا كانت علامات (١٠٠٠٠٠) طالب في الثانوية العامة تتبع التوزيع الطبيعي ذي الوسط (٦٣) وتباين (٤٩) أوجد ما يلي:

(١) عدد الطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٦٠، ٧٥.

(٢) نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن العلامة (٩٢).

(٣) عدد الطلبة الناجحين إذا كانت علامة النجاح (٥٠).

(٤) الرتبة المئينية للعلامة (٧٠).

(٥) الرتبة المئينية للعلامة (٥٤).

الحل:

يتضح من المعطيات بأن س : علامة الطالب في الثانوية العامة تخضع لتوزيع طبيعي وسطه (٦٣) وتباين (٤٩) وبالتالي يجب تحويل المتغير العشوائي س من متغير طبيعي إلى متغير معياري حسب العلامة المعيارية.

$$\text{ز} = \frac{\text{س}-\mu}{\sigma} = \frac{\text{س}-٦٣}{٧}$$

(١) يجب أولاً استخراج المساحة الواقعة بين ($\text{ز}_{٦٠}$، $\text{ز}_{٧٥}$).

= ح (٦٠ < س < ٧٥)

$$= ح\left(\frac{٦٠-٦٣}{٧} > \frac{س-٦٣}{٧} > \frac{٧٥-٦٣}{٧}\right) = ح\ (-٠٫٤٣ < ز < ١٫٧١)$$

$$= ح\ (١٫٧١) + ح\ (٠٫٤٣) = ٠٫٤٥٦٤ + ٠٫١٦٦٤ = ٠٫٦٢٢٨$$

وبالتالي عدد الطلبة = المساحة المستخرجة × عدد الطلبة الكلي.

= ٠٫٦٢٢٨ × ١٠٠٠٠٠ = ٦٢٢٨٠ طالباً

(٢) نسبة الطلبة الذين يزيد علاماتهم عن (٩٢) تساوي المساحة الواقعة على يمين ($ز_{٩٢}$) مضروبة ١٠٠٪.

$$\therefore ح\ (س > ٩٢) = ح\left(\frac{س-٦٣}{\sigma} < \frac{٩٢-٦٣}{٧}\right)$$

$$= ح\ (ز > ٤٫١٤)$$

$$= ٠٫٥٠٠٠ - ح\ (٤٫١٤) = صفر$$

∴ نسبة الطلبة الذين علاماتهم تزيد عن ٩٢ = صفر × ١٠٠٪

= صفر ٪

(٣) حتى يكون الطالب ناجحاً يجب أن تكون علامته أكثر من أو تساوي (٥٠).

وعندئذ يجب استخراج المساحة الواقعة على يمين (س = ٥٠) = المساحة الواقعة على يمين (ز = -١٫٨٦).

$$= ٠٫٥٠٠٠ + ح\ (١٫٨٦) = ٠٫٥٠٠٠ + ٠٫٤٦٨٦ = ٠٫٩٦٨٦$$

∴ عدد الطلبة الناجحين = ٠٫٩٦٨٦ × ١٠٠٠٠٠ = ٩٦٨٦٠ طالب

(٤) الرتبة المئينية للعلامة (٧٠) هي النسبة المئوية للعلامات التي تقل عن العلامة (٧٠) أو هي النسبة المئوية للمساحة الواقعة إلى يسار ($ز_{٧٠}$).

$$ح\ (س < ٧٠) = ح\ (ز < ١)$$

$$= ٠٫٥٠٠٠ + ح\ (١) = ٠٫٥٠٠٠ + ٠٫٣٤١٣ = ٠٫٨٤١٣$$

∴الرتبة المئينية = المساحة المستخرجة × ١٠٠٪

= ٠٫٨٤١٣ × ١٠٠٪ = ٨٤٫١٣٪

(٥) الرتبة المئينية للعلامة (٥٤) هي النسبة المئوية للعلامات الـتي تقـل عـن (٥٤) أو هي النسبة المئوية للمساحة الواقعة إلى يسار (ز$_{٥٤}$) .

ح (س < ٥٤) = ح (ز < -١,٢٩)

= ح (ز > ١,٢٩) = ٠,٥٠٠٠ – ح (١,٢٩)

= ٠,٥٠٠٠ – ٠,٤٠١٥ = ٠,٠٩٨٥

∴ الرتبة المئينية = ٠,٠٩٨٥ × ١٠٠٪ = ٩,٨٥٪

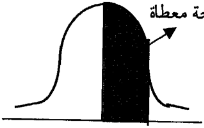
(٧-٢-٢) كيفية استخراج العلامة المعيارية (ز) إذا علمت المساحة:

الحالة الأولى:

(الحالة القياسية) = ح (∴ < ز < ز$_{١}$)

= ح (ز$_{١}$)= مساحة معطاة.

[انظر الشكل المجاور]



في هذه الحالـة نبحـث عـن المسـاحة المعطـاة في الجدول مباشرة وإذا لم نجدها نأخذ أقرب مساحة إليها.

مثال (١٤): استخرج قيمة (ز) المطلوبة:

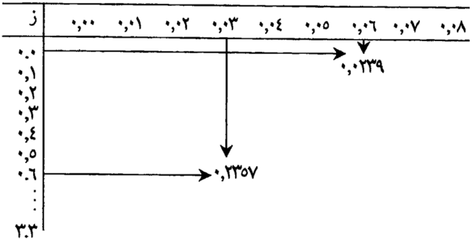
(١) ح (∴ < ز < ز$_{١}$) = ٠,٢٣٥٧

(٢) ح (∴ < ز < ز$_{٢}$) = ٠,٠٢٣٩

(٣) ح (∴ < ز < ز$_{٣}$) = ٠,٤٧٧٠

(٤) ح (∴ < ز < ز$_{٤}$) = ٠.١٢٥٤

(٥) ح (∴ < ز < ز$_{٥}$) = ٠,٤٥٠٠



الحل:

(١) نبحث عن المساحة المعطاة وهي (٠,٢٣٥٧).

في الجدول فنجدها تقابل علامة معيارية (ز$_{١}$ = ٠,٠٣ + ٠,٦) = (ز$_{١}$ = ٠,٦٣).

(٢) نبحث عن المساحة المعطاة (٠,٠٢٣٩) فنجدها تقابل ز$_{٢}$ = ٠,٠٦.

(٣) نبحث عن المساحة المعطاة (٠,٤٧٧٠) في الجدول ولكن لم يتم العثور عليها فنأخذ أقرب مساحة لها وهي (٠,٤٧٧٢) فتكون قيمة ز$_{٣}$ = ٢ .

(٤) نبحث عن المساحة المعطاة في الجدول ولكن لن نجدها فنأخذ أقرب مساحة لها وهي (٠,١٢٥٥) فتكون قيمة ز$_{٤}$ = ٠,٣٤.

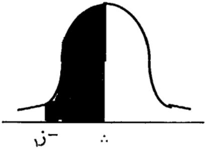
(٥) نبحث عن المساحة المعطاة (٠,٤٥٠٠) في الجدول ولكن لن نجدها فنأخذ أقرب مساحة لها وهنا توجد مساحتين هما (٠,٤٤٩٥) و (٠,٤٥٠٥) فتكون قيمة ز$_{٥}$ تساوي الوسط الحسابي لقيمتي ز المقابلة لهما.

وعندئذ فإن ز$_{٥}$ = $\frac{١,٦٥ + ١,٦٤}{٢}$ = ١,٦٤٥.

الحالة الثانية:

ح (−ز$_{١}$ < ز < ∴) = مساحة معطاة

[انظر الشكل المجاور].



نبحث عـن المسـاحة المعطـاة في الجـدول مباشـرة كمـا فعلنـا في الحالـة الأولى وتكون ز المقابلة سالبة.

مثال (١٥): أوجد قيمة ز المطلوبة:

(١) ح (ز$_١$ < ز < ٠) = ٠,٤٧٣٨

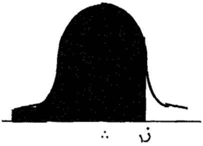
(٢) ح (ز$_٢$ < ز < ٠) = ٠,٤٣٠٦

الحل: (١) نبحث عن المساحة المعطاة (٠,٤٧٣٨) في الجدول مباشرة لنجـد بأن قيمة ز المقابلة لها (١,٩٤) وعندئذٍ تكون قيمة ز$_١$ المطلوبة = -١,٩٤.

(٢) نبحث عن المساحة المعطاة (٠,٤٣٠٦) في الجدول لنجد قيمـة ز المقابلـة لهـا تساوي(١,٤٨) وعندئذ تكون قيمة (ز$_٢$= -١,٤٨).

الحالة الثالثة:

ح (ز < ز$_١$) = مساحة معطاة =المساحة الواقعة على يسار (تحت) ز= ز$_١$



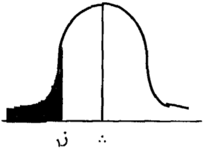
(أ) إذا كانت المساحة المعطاة أكبر مـن (٠,٥٠٠٠) فـإن ز$_١$ تكـون موجبـة ولإيجادهـا نطـرح مـن المسـاحة المعطاة (٠,٥٠٠٠) كما يلي:

ح (ز$_١$) = المساحة المعطاة - ٠,٥٠٠٠

= المساحة الناتجة

ثم نبحث عن المساحة الناتجة في الجدول مباشرة لإيجاد قيمة ز$_١$ المقابلة.

(ب) إذا كانت المساحة المعطاة أقل من (٠,٥٠٠٠) فإن ز$_١$ تكون سالبة ولإيجادهـا نطـرح المساحة المعطاة من (٠,٥٠٠٠) كما يلي:



ح (ز$_١$) = ٠,٥٠٠٠ - المساحة المعطاة

= المساحة الناتجة

ثم نبحث عن المساحة الناتجة في الجدول لإيجاد قيمة ($ز_١$) المقابلة وعندها تكون $ز_١ = -ز$.

مثال (١٦): استخرج قيمة ز المطلوبة فيما يلي:

(١) ح ($ز < ز_١$) = ٠,٨٣١٥ (٢) ح ($ز < ز_٢$) = ٠,١٦٨٥

الحل: (١) بما أن المساحة المعطاة على يسار ($ز = ز_١$) أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن $ز_١$ موجبة وعندئذ فإن:

ح ($ز_١$) = المساحة الجدولية تحت ($ز_١$) = ٠,٨٣١٥ − ٠,٥٠٠٠

= ٠,٣٣١٥

وبالبحث في الجدول نجد بأن $ز_١$ = ٠,٩٦

(٢) بما أن المساحة المعطاة على يسار ($ز = ز_٢$) اقل من (٠,٥٠٠٠) فإن $ز_٢$ سالبة وعندئذ فإن:

ح ($-ز_٢$) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,١٦٨٥

= ٠,٣٣١٥

وبالبحث في الجدول نجد بأن $-ز_٢$ = ٠,٩٦ ⇐ $ز_٢$ = −٠,٩٦

الحالة الرابعة:

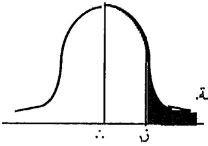
المساحة الواقعة على يمين ($ز = ز_١$) = ح ($ز > ز_١$) = مساحة معطاة.

(أ) إذا كانت المساحة المعطاة أقل من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة $ز_١$ تكون موجبة ولكي نستخرج قيمة ($ز_١$) نطرح المساحة المعطاة من (٠,٥٠٠٠) كالتالي:

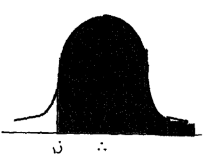
ح ($ز_١$) = ٠,٥٠٠٠ − المساحة المعطاة

= المساحة الناتجة

ثم نبحث عنها في الجدول لاستخراج ($ز_١$) المقابلة.



(ب) إذا كانت المساحة المعطاة أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة ز$_1$ تكون سالبة ولكي نستخرج قيمة ز$_1$ نطرح (٠,٥٠٠٠) من المساحة المعطاة كالتالي:



ح (-ز$_1$) = المساحة المعطاة - ٠,٥٠٠٠

= المساحة الناتجة

ثم نبحث عنها في الجدول.

مثال (١٧): استخرج قيمة ز المطلوبة:

(١) ح (ز > ز$_1$) = ٠,٣١١٥   (٢) ح (ز > ز$_2$) =٠,٨١١٥

الحل: (١) بما أن المساحة المعطاة أقل من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة ز$_1$ موجبة وبالتالي فإن:

ح (ز$_1$) = ٠,٥٠٠٠ - ٠,٣١١٥ = ٠,١٨٨٥

والبحث عن هذه المساحة (٠,١٨٨٥) في الجدول، نجد بأن ز$_1$ = ٠,٤٩

(٢) بما أن المساحة المعطاة أكبر من (٠,٥٠٠٠) فإن قيمة ز$_2$ سالبة وبالتالي فإن:

ح (-ز$_2$) = ٠,٨١١٥ - ٠,٥٠٠٠ = ٠,٣١١٥

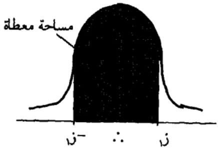
وبالبحث عن هذه المساحة (٠,٣١١٥) في الجدول، نجد بأن (-ز$_2$ = ٠,٨٨)

وعليه فإن ز$_2$ = -٠,٨٨.

الحالة الخامسة:

المساحة الواقعة بين (-ز$_1$ ، ز$_1$) = ح (|ز| > ز$_1$)

= مساحة معطاة لكي نستخرج قيمة ز$_1$ نعمل التالي:



المساحة المستخرجة = ح (ز$_{١}$) = $\frac{\text{المساحة المعطاة}}{٢}$

ثم نبحث عن المساحة المستخرجة في الجدول لإيجاد (ز$_{١}$) المقابلة.

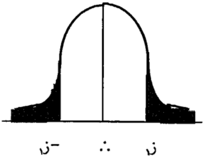
مثال (١٨): أوجد قيمة ز$_{١}$ حيث ح (|ز| < ز$_{١}$) = ٠,٩٥٤٤

الحل: المساحة المستخرجة = ح (ز$_{١}$) = $\frac{٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٤٧٧٢

وبالبحث عنها في الجدول نجد بأن ز$_{١}$ المقابلة = ٢.

الحالة السادسة:

المساحة الواقعة خارج (−ز$_{١}$، ز$_{١}$) = ح (| ز | > ز$_{١}$) = مساحة معطاة



ح (ز$_{١}$) = $\frac{١ - \text{المساحة المعطاة}}{٢}$ = مساحة ناتجة

ثم نبحث عنها في الجدول.

مثال (١٩): أوجد قيمة ز$_{١}$ حيث ح (| ز| > ز$_{١}$) = ٠,٠٤٥٦

الحل: المساحة الناتجة = ح (ز$_{١}$) = $\frac{١ - ٠,٠٤٥٦}{٢}$ = ٠,٤٧٧٢

وبالبحث عن المساحة (٠,٤٧٧٢) في الجدول نجد بأن ز$_{١}$ = ٢.

مثال (٢٠): في امتحان عام كان الوسط الحسابي يساوي (٤٨) والانحراف المعياري (٨) فإذا كان التوزيع قريباً من التوزيع الطبيعي.

المطلوب:

(١) علامة النجاح في هذا الامتحان إذا كان عدد الناجحين في الامتحان (٦٥٠٠) وعدد المتقدمين له (١٠٠٠٠) شخص.

(٢) إذا كانت اللجنة الفاحصة تعطي جائزة لأعلى ٥٪ من الطلبة فما هي أقل علامة تحصل على جائزة.

(٣) المئين الستون.

(٤) المئين التسعون.

(٥) نصف المدى الربيعي.

(٦) إذا اتفق على تقسيم أفراد هذا التوزيع إلى خمس فئات مرتبة كالتالي:

فئة الممتاز وتتكون من ١٠٪ من الطلبة.

فئة الجيد وتتكون من ٢٠٪ من الطلبة.

فئة المتوسط وتتكون من ٤٠٪ من الطلبة.

فئة دون المتوسط وتتكون من ٢٠٪ من الطلبة.

فئة الضعيف وتتكون من ١٠٪ من الطلبة.

أوجد حدود الفئات الخمس من العلامات.

الحل:

إذا كان س متغير عشوائي يعني العلامة فإن س: ط (٤٨، ٦٤).

(١) المطلوب هنا هو إيجاد قيمة $س_١$ بحيث أن ح $(س > س_١) = \frac{٦٥٠٠}{١٠٠٠٠}$

$$\Leftarrow ح\,(س > س_١) = ٠{,}٦٥٠٠$$

$$\Leftarrow ح\,(ز > \frac{س_١ - ٤٨}{٨}) = ٠{,}٦٥٠٠$$

$$لتكن\ ز_١ = \frac{س_١ - ٤٨}{٨}$$

$$\Leftarrow ح\,(-ز_١) = ٠{,}٦٥٠٠ - ٠{,}٥٠٠٠ = ٠{,}١٥٠٠$$

$$\Leftarrow -ز_١ = ٠{,}٣٩ \Leftarrow ز_١ = -٠{,}٣٩$$

$$وعندئذ\ فإن\ -٠{,}٣٩ = \frac{س_١ - ٤٨}{٨}$$

$$\Leftarrow س_١ = ٤٨ - ٨ \times ٠{,}٣٩ = ٤٤{,}٨٨$$

مما يعني بأن علامة النجاح = ٤٤,٨٨ فأكثر.

(٢) المطلوب إيجاد قيمة أ الــتي نسـبة (٠,٠٥) مـن المسـاحة فوقـها وبالتـالي فـإن المطلوب:

ح (س > أ) = ٠,٠٥ ⇐ ح (ز > $ز_{أ}$) = ٠,٠٥

⇐ ح ($ز_{أ}$) = ٠,٥٠٠٠ – ٠,٠٥ = ٠,٤٥٠٠

⇐ $ز_{أ}$ = ١,٦٤٥

وعليه فإن $ز_{أ}$ = ١,٦٤٥ = $\frac{\text{أ} - ٤٨}{٨}$ ⇐ أ = ٦١,٦

وبالتالي فإن أقل علامة تحصل على جائزة تساوي (٦١,١٦).

(٣) المئين الستون هي العلامة الــتي تحصـر تحتـها ٦٠٪ مـن العلامـات وبالتـالي المطلوب إيجاد العلامة التي تحصر بينها وبين الوسط ١٠٪ من العلامات.

من المعطيات:

ح (س < $م_{٦٠}$) = ٠,٦٠٠٠

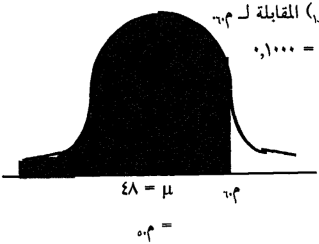
نجد أولاً العلامة المعيارية ($ز_{١}$) المقابلة لـ $م_{٦٠}$.

ح ($ز_{١}$) = ٠,٦٠٠٠ – ٠,٥٠٠٠ = ٠,١٠٠٠

⇐ $ز_{١}$ = ٠,٢٥

∴ ٠,٢٥ = $\frac{م_{٦٠} - ٤٨}{٨}$

⇐ $م_{٦٠}$ = ٤٨ + ٢ = ٥٠



(٤) من المعطيات:

ح (س < $م_{٩٠}$) = ٠,٩٠٠٠

وبإيجاد قيمة ($ز_{٢}$) المقابلة لـ $م_{٩٠}$.

ح ($ز_{٢}$) = ٠,٩٠٠٠ – ٠,٥٠٠٠ = ٠,٤٠٠٠

$\Leftarrow \text{ز}_{٢} = ١,٢٨$

$\therefore \; ١,٢٨ = \frac{\text{م}_{٩٠} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{م}_{٩٠} = ٥٨,٢٤$

(٥) نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{م}_{٧٥} - \text{م}_{٢٥}}{٢}$

(أ) نجد $\text{م}_{٧٥}$: بناءً على تعريف المئين الخامس والسبعون نجد بأن:

ح (س < $\text{م}_{٧٥}$) = ٠,٧٥٠٠ وبالتالي فإن:

ح ($\text{ز}_{١}$) = ٠,٧٥٠٠ − ٠,٥٠٠٠ = ٠,٢٥٠٠ $\Leftarrow$ $\text{ز}_{١}$ = ٠,٦٧

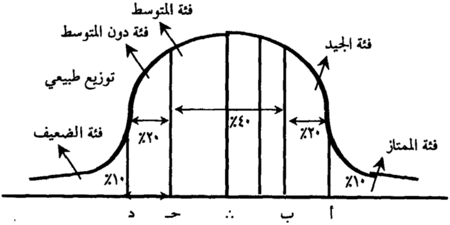
$\therefore \; ٠,٦٧ = \frac{\text{م}_{٧٥} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{م}_{٧٥} = ٥٣,٣٦$

(ب) نجد $\text{م}_{٢٥}$ وبالتماثل نجد بأن قيمة (ز) المقابلة بـ $\text{م}_{٢٥}$ تساوي (−٠,٦٧).

وعندئذ فإن $-٠,٦٧ = \frac{\text{م}_{٢٥} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{م}_{٢٥} = ٤٢,٦٤$

$\therefore$ نصف المدى الربيعي = $\frac{٥٣,٣٦ - ٤٢,٦٤}{٢} = ٥,٣٦$

(٦) الشكل المجاور يبين توزيع الفئات حسب المعطيات.



حتى نستطيع إيجاد أ، ب، حـ، د يجب أولاً إيجاد العلامات المعيارية المقابلة لها زأ، زب، زحـ، زد.

(١) ح (ز > $ز_أ$) = ٠,١٠٠٠   (٣) ح (ز > $ز_{جـ}$) = ٠,٧٠٠٠

(٢) ح (ز > $ز_ب$) = ٠,٣٠٠٠   (٤) ح (ز > $ز_د$) = ٠,٩٠٠٠

وبالتالي فإن:

(١) ح ($ز_أ$) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,١٠٠٠ = ٠,٤٠٠٠

⇐ $ز_أ$ = ١,٢٨

وبالتماثل نجد بأن $ز_د$ = −١,٢٨

(٢) ح ($ز_ب$) = ٠,٥٠٠٠ − ٠,٣٠٠٠ = ٠,٢٠٠٠

⇐ $ز_ب$ = ٠,٥٢ وبالتماثل نجد بأن $ز_{جـ}$ = −٠,٢٥

وعندئذ فإن:

$$\text{ز}_{\text{أ}} = ١,٢٨ = \frac{\text{أ} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{أ} = ٥٨,٢٤$$

$$\text{ز}_{\text{د}} = -١,٢٨ = \frac{\text{د} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{د} = ٣٧,٧٦$$

$$\text{ز}_{\text{ب}} = ٠,٢٥ = \frac{\text{ب} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{ب} = ٥٢,١٦$$

$$\text{ز}_{\text{جـ}} = -٠,٥٢ = \frac{\text{جـ} - ٤٨}{٨} \Leftarrow \text{جـ} = ٤٣,٨٤$$

وعليه فإن حدود الفئات الخمس هي:

فئة الممتاز من ٥٨,٢٤ فأكثر.

فئة الجيد من ٥٢,٢٤ إلى ٥٨,٢٤.

فئة المتوسط من ٤٣,٨٤ إلى ٥٢,٢٤.

فئة دون المتوسط من ٣٧,٧٦ إلى ٤٣,٨٤.

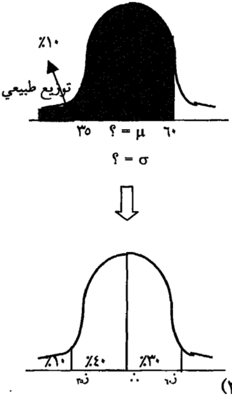
فئة الضعيف دون ٣٧,٧٦.

مثال (٢١): إذا كانت الأجور الأسبوعية لعمال مصنع ما تتبع التوزيع الطبيعي وجد أن ١٠٪ من العمال يتقاضون أجراً أقل من ٣٥ دولاراً وأن ٨٠٪ يتقاضون أجراً أقل من ٦٠ دولار أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

الحل: حيث أن معالم المجتمع (μ، σ) مجهولتين والمعطى:

(١) ح (س < ٣٥) = ٠,١٠٠٠.

(٢) ح (س < ٦٠) = ٠,٨٠٠٠.



بتحويل المتغير العشوائي س إلى متغير معياري فيصبح لدينا:

(١) ح ($ز_{٦٠}$) = ٠,٣٠٠٠

(٢) ح ($-ز_{٣٥}$)= ٠,٤٠٠٠

$\Leftarrow ز_{٦٠} = ٠,٨٤$

$= \frac{٦٠ - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٠,٨٤\,\sigma = ٦٠ - \sigma$ .... (١)

$ز_{٣٥} = \frac{٣٠ - \mu}{\sigma} = -١,٢٨ \Leftarrow -١,٢٨\,\sigma$

$= ٣5 - \mu$ .... (٢)

وبضرب المعادلة (٢) بـ -١ وجمعها للمعادلة (١) ينتج:

$٢,١٢\,\sigma = ٢٥ \Leftarrow \sigma = \frac{٢٥}{٢,١٢} = ١١,٧٩$

الآن بالتعويض في المعادلة (١) ينتج:

$٠,٨٤ \times ١١,٧٩ = ٦٠ - \mu \Leftarrow \mu = ٥٠,٠٩$

تمارين الوحدة السابعة

س١: إذا كانت ز: ط (صفر، ١) أوجد:

(١) ح (٠ < ز < ٠,٨٩)
(٢) ح (-٠,٣ < ز < ٠)
(٣) ح (١ < ز < ١,٩٥)
(٤) ح (-٣ < ز < -٢,١٨)
(٥) ح (-١ < ز < ٢,٨٨)
(٦) ح (ز > ٢,٤)
(٧) ح (ز > -٢,٤)
(٨) ح (|ز| > ١,١٣)

س٢: أوجد قيمة ز المطلوبة فيما يلي:

(١) ح (٠ < ز < ز$_{١}$) = ٠,٤٣٣٢
(٢) ح (ز$_{٢}$ < ز < .:.) = ٠,٤٣٣٢
(٣) ح (ز > ز$_{٣}$) = ٠,٦٩١٥
(٤) ح (|ز| < ز$_{٤}$) = ٠,٤٢٢٠
(٥) ح (|ز| > ز$_{٥}$) = ٠,٤٢٢٠
(٦) ح (ز < ز$_{٦}$) = ٠,٦٩١٥

س٣: إذا كانت س: ط (٨٠، ٦٤) أوجد قيمة أ المطلوبة:

(١) ح (س > أ) = ٠,٩٥٠٠
(٢) ح (س < أ) = ٠,٩٥٠٠

س٤: إذا كانت س: ط (٧٢، ٣٦) أوجد ما يلي:

(١) ح (س < ٦٦)
(٢) ح (س > ٦٦)
(٣) ح (س > ٧٨)
(٤) ح (٦٥ < س < ٧٨)

س٥: إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب في امتحان ما تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره (٦٥) وتباين (٤٩) أوجد ما يلي:
(١) عدد الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن (٧٢).
(٢) علامة النجاح إذا كان عدد الناجحين يساوي (٦٧٠٠) طالب.

(٣) نسبة الطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٥٨، ٧٩.

(٤) المئين الثمانون.

(٥) المئين العشرون.

(٦) المدى الربيعي.

(٧) الرتبة المئينية للعلامة (٧٢).

س٦: إذا كان الأجر اليومي لعمال النسيج يتوزع تبعاً للتوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (٢٠) دولار وبانحراف معياري (٢) دولار أوجد الأجرة التي سيتسلم ٢٠٪ من عمال النسيج أكثر منها.

س٧: شركة لإنتاج الصواريخ لديها آلة جديدة .. فإذا كان مدى الصواريخ يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري (٥) كم أوجد قيمة متوسط المدى الذي يجب أن تجهز الآلة عنده حتى تضمن الشركة أن ٤٪ فقط من الصواريخ سوف يكون مداها (٢٥٠) كم أو أقل.

س٨: أجرى معلم اختباراً لطلابه وكان توزيع نتائجهم قريباً من التوزيع الطبيعي فإذا كان الوسط الحسابي يساوي (٧٠) والانحراف المعياري (٥) وعلامة النجاح تساوي ٦٢ فما هي نسبة النجاح.

س٩: إذا كانت علامات الطلبة في جامعة البلقاء التطبيقية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه (٦٩) وانحراف معياري (٨) أوجد ما يلي:

(١) إذا كانت هذه الجامعة تمنح جائزة تقديرية لأعلى ٤٪ من طلبتها فما هي أقل علامة تحصل على جائزة تقديرية.

(٢) إذا كان عدد الطلبة في الجامعة (٣٠٠٠٠) طالب وعدد الطلبة الناجحين يساوي (١٨٠٠٠) فما هي علامة النجاح.

(٣) المئين السبعون.

(٤) المئين ٣٠.

(٥) نصف المدى الربيعي.

(٦) إذا كانت الجامعة تعمل على تقسيم علامات الطلبة فيها إلى خمس فئات هي:

فئة الممتاز وتتكون من ٥٪ من الطلبة.

فئة الجيد جداً وتتكون من ١٥٪ من الطلبة.

فئة الجيد وتتكون من ٢٠٪ من الطلبة.

فئة المتوسط وتتكون من ٣٠٪ من الطلبة.

فئة الضعيف وتتكون من بقية الطلبة.

أوجد حدود الفئات الخمس من العلامات.

الوحدة الثامنة

٨

الأرقام القياسية

The index numbers

(٨-١) مفهوم الرقم القياسي.

(٨-٢) الأساس والمقارنة.

(٨-٣) أهمية الأرقام القياسية واستعمالاتها.

(٨-٤) طرق تركيب الأرقام القياسية.

(٨-٤-١) الأرقام القياسية البسيطة.

(٨-٤-٢) الأرقام القياسية المرجحة.

تمارين الوحدة.

الأرقام القياسية

The index numbers

(٨-١) مفهوم الرقم القياسي:

الرقم القياسي مؤشر إحصائي يستخدم للتعبير عن التغير النسبي أو النسبي المئوي الذي يصيب ظاهرة ما، نتيجة لاختلاف الزمان أو المكان، وكما أنه يستخدم لمقارنة التغير في ظاهرة واحدة يمكن استخدامه لمقارنة التغير في المستوى العام لمجموعة من المتغيرات أو الظواهر المختلفة فيما بينها لكن يجب أن تكون هذه الظواهر مشتركة في صفة معينة لتكون مجموعات متجانسة وكمثال على هذا إذا أردنا مقارنة انتاج السلع الاستهلاكية الرأسمالية في عام ١٩٨٥ مع نظيره في عام ١٩٩٥ فإن انتاج كل من أجهزة الكمبيوتر والستالايت والألعاب الإلكترونية... إلخ يكون مجموعات متجانسة ممثلة للسلع الاستهلاكية مع وجود الاختلافات الكثيرة بينها فلو أن انتاج مثل هذه السلع يتغير بنفس النسبة سوف لا تكون هنالك أية مشكلة في مقارنة التغيرات، لكن عملياً فإن كل سلعة من هذه السلع تحكمها ظروف مختلفة وبالتالي فإن انتاج مثل هذه السلع يتغير بنسب مختلفة، وقد يكون من المفيد إيجاد وسيلة ولو تقريبية لاحتواء العوامل الثابتة والمتغيرة التي تحكم هذه الظواهر.

(٨-٢) الأساس والمقارنة:

- إذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في زمان معين إلى قيمتها في زمان آخر نتخذه أساساً نسمي هذا الزمان الأول فترة المقارنة أما إذا نسبنا قيمة ظاهرة ما في مكان معين إلى قيمتها في مكان آخر تتخذه أساساً نسمي المكان الآخر المكان الأساسي والمكان المعين بالمكان المقارن.

مثال(١):

إذا كان سعر كيلو الخبز عام ١٩٨٧ يساوي (٨) قروش وأصبح سعر كيلو الخبز في عام ١٩٩١ يساوي (٢٠) قرشاً فإن منسوب سعر كيلو الخبز = $\frac{٢٠}{٨}$ × ١٠٠٪ = ٢٥٠٪ أي أن سعر كيلو الخبز تضاعف بمقدار مرتين ونصف ونطلق على عام ١٩٨٧ فترة الأساس وعام ١٩٩١ (فترة المقارنة).

وعند اختيار مكان الأساس أو زمان الأساس يجب أن يتمتع بالاستقرار الاقتصادي وأن تكون خالية من العوامل الشاذة كالحروب مثلاً وأن لا يكون الأساس بعيداً عن المقارنة.

(٨-٣) أهمية الأرقام القياسية واستعمالاتها:

تستعمل الأرقام القياسية في شتى نواحي الحياة لقياس التغير الذي يطرأ عليها من هنا كان للأرقام القياسية تطبيقات عديدة في مجالات مختلفة متعلقة بالعلوم الاجتماعية والنفسية والإدارية والزراعية والمالية كما تساعد الأرقام القياسية على تحليل العوامل التي تساعد في تغير الظاهرة فتبين مدى مساهمة كل عامل من هذه العوامل في إحداث التغير الكلي وتستخدم الأرقام القياسية أيضاً في الرقابة على تنفيذ الخطط حيث يستفاد فيها في تحديد مدى تنفيذ الخطط الموضوعة.

يستعمل الرقم القياسي لمعرفة القوة الشرائية لدخل الفرد (الدخل الحقيقي للفرد) هي عبارة عن خارج قسمة الرقم القياسي للدخل على الرقم القياسي لتكاليف المعيشة والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٢):

إذا كان الرقم القياسي لدخل الفرد عام ١٩٩١ بالنسبة لعام ١٩٨٧ يساوي (١,٢) بينما الرقم القياسي لتكاليف المعيشة لعام ١٩٩١ بالنسبة لعام ١٩٨٧ يساوي (٢,٤) أوجد الدخل الحقيقي للفرد.

الحل:

$$\text{الدخل الحقيقي لدخل الفرد (القوة الشرائية لدخل الفرد)} = \frac{\text{الرقم القياسي للدخل}}{\text{الرقم القياسي لتكاليف المعيشة}}$$

$$= \frac{١,٢}{٢,٤} = ٠,٥$$

ومن هنا نلاحظ بأن القوة الشرائية قد نقصت إلى النصف، مما يدلل أن هنالك انكماش في الدخل الحقيقي للفرد.

(٨-٤) طرق تركيب الأرقام القياسية:

يتركب الرقم القياسي من قيمة ظاهرة أو أكثر في أزمنة أو أمكنة مختلفة. وكل قيمة من هذه القيم تدخل في الرقم القياسي طبقاً للهدف الذي يكوّن الرقم القياسي من أجله وهنالك عدة أساليب لتركيب الأرقام القياسية منها:

(٨-٤-١) الأرقام القياسية البسيطة:

وهي نوعان:

الأرقام القياسية البسيطة للأسعار وهي:

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار:

إذا كان ($ع_م$) هو السعر في سنة المقارنة و ($ع_س$) هو السعر في سنة الأساس فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{ر.ق.ت.ب للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times ١٠٠ \%$$

$$= \frac{\sum ع_م}{\sum ع_س} \times ١٠٠\%$$

(ب) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{ر. ق. ن. ب}_{\text{للأسعار}} = \frac{1}{\text{ك}} \sum \left(\frac{\text{ع}_\text{م}}{\text{ع}_\text{س}} \right) \times 100\%$$

حيث ك: عدد السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي.

(٢) الأرقام القياسية البسيطة للكميات وهي:

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات:

إذا كان ($\text{ك}_\text{م}$) هو الكمية في سنة المقارنة و ($\text{ك}_\text{س}$) هي الكمية في سنة الأساس فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{ر.ق.ت.ب}_{\text{للكميات}} = \frac{\sum \text{ك}_\text{م}}{\sum \text{ك}_\text{س}} \times 100\%$$

(ب) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{ر. ق. ن. ب}_{\text{للكميات}} = \frac{1}{\text{ك}} \sum \left(\frac{\text{ك}_\text{م}}{\text{ك}_\text{س}} \right) \times 100\%$$

حيث ك: عدد السلع الداخلة في حساب الرقم القياسي.

مثال (٣):

الجدول التالي يمثل أسعار وكميات خمس سلع عامي ١٩٩٣، ١٩٩٥.

السلعة	السعر عام ١٩٩٣	السعر عام ١٩٩٥	الكمية عام ١٩٩٣	الكمية عام ١٩٩٥
أ	٩	١٠	١٠	٢٠
ب	١٠	١٠	١٥	١٥
جـ	٤٠	٤٥	٢٠	٤٠
د	١٨	٢٠	١٥	٣٠
هـ	١٠	٢٠	١٠	١٥

باعتبار سنة ١٩٩٣ هي الأساس. المطلوب:

(١) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.

(٢) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

(٣) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.

(٤) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات.

الحل:

(١) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار $= \frac{\sum ع_{م}}{\sum ع_{س}} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{١٠ + ١٠ + ٤٥ + ٢٠ + ٢٠}{٩ + ١٠ + ٤٠ + ١٨ + ١٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٠٥}{٨٧} \times ١٠٠\% = ١٢٠,٦٩\%$$

(٢) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار $= \frac{١}{ك} \sum \left(\frac{ع_{م}}{ع_{س}} \right) \times ١٠٠\%$

$$= \frac{١}{٥} \left(\frac{١٠}{٩} + \frac{١٠}{١٠} + \frac{٤٥}{٤٠} + \frac{٢٠}{١٨} + \frac{٢٠}{١٠} \right) \times ١٠٠\%$$

$$= ١٢٦,٩٤\ \%$$

(٣) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات $= \frac{\sum ك_{م}}{\sum ك_{س}} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{٢٠ + ١٥ + ٤٠ + ٣٠ + ١٥}{١٠ + ١٥ + ٢٠ + ١٥ + ١٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٢٠}{٧٠} \times ١٠٠\% = ١٧١,٤٣$$

(٤) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات $= \frac{١}{ك} \sum \left(\frac{ك_{م}}{ك_{س}} \right) \times ١٠٠\%$

$$= \frac{١}{٥}\left(\frac{٢٠}{١٠}+\frac{١٥}{١٥}+\frac{٤٠}{٢٠}+\frac{٣٠}{١٥}+\frac{١٥}{١٠}\right) \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١}{٥} \times (٢ + ١ + ٢ + ٢ + ١,٥) \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{٨,٥}{٥} \times ١٠٠\% = ١٧٠\%$$

ويمكن تركيب رقم قياسي يعتمد على السعر والكمية معاً ويعرف بالرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم وتعطى معادلته بالمعادلة التالية:

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيم} = \frac{\sum ك_م \times ع_م}{\sum ك_س \times ع_س} \times ١٠٠\%$$

بالرجوع إلى المثال السابق فإن:

الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة

$$= \frac{٢٠\times١٠ + ١٥\times١٠ + ٤٠\times٤٥ + ٣٠\times٢٠ + ١٥\times٢٠}{٩\times١٠ + ١٠\times١٥ + ٤٠\times٢٠ + ١٨\times١٥ + ١٠\times١٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{٢٠٠ + ١٥٠ + ١٨٠٠ + ٦٠٠ + ٣٠٠}{٩٠ + ١٥٠ + ٨٠٠ + ٢٧٠ + ١٠٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{٣٠٥٠}{١٤١٠} \times ١٠٠\% = ٢١٦,٣١ \%$$

(٨-٤-٢) الأرقام القياسية المرجحة:

لاحظنا في المثال السابق بأن الرقم القياسي قد يتأثر بشكل كبير بإحدى السلع الداخلة في حسابه بالرغم قد تكون هذه السلعة ليس لها أهمية كبيرة ولعلاج مثل هذا الوضع نعطي كل مادة داخلة في تركيب الرقم القياسي أهمية عددية تتناسب مع أهميتها في السوق أو الحياة.

وطبقاً لهذا الأسلوب يطلق على الأرقام القياسية التي تتمتع بهذه الخاصية الأرقام القياسية المرجحة والأرقام القياسية المرجحة على نوعين:

أولا: الأرقام القياسية المرجحة للأسعار:

وهي أربع أرقام:

١- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس: (رقم لاسبير للأسعار):

فإذا كان ($ع_م$) هي السعر في سنة المقارنة و ($ع_س$) السعر في سنة الأساس و ($ك_س$) الكمية في سنة الأساس وبالتالي فإن رقم لاسبير للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم لاسبير للأسعار} = \frac{\sum ع_م \times ك_س}{\sum ع_س \times ك_س} \times ١٠٠\%$$

٢- الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (رقم باش للأسعار):

إذا كان ($ع_م$) هو السعر في سنة المقارنة و ($ع_س$) السعر في سنة الأساس و ($ك_م$) الكمية في سنة المقارنة فإن رقم باش للأسعار يعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\sum ع_م \times ك_م}{\sum ع_س \times ك_م} \times ١٠٠\%$$

٣- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (رقم فيشر للأسعار):

ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{\text{رقم لاسبير للأسعار} \times \text{رقم باش للأسعار}}\ \%$$

ويهتم هذا الرقم بالناحية الرياضية فقط ولكن لا معنى اقتصادي له.

٤- رقم مارشال للأسعار:

ويعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم مارشال للأسعار} = \frac{\sum ع_م \left(ك_س + ك_م\right)}{\sum ع_س \left(ك_س + ك_م\right)} \times ١٠٠\%$$

نلاحظ بأن مارشال رجح بالوسط الحسابي لكميات الأساس والمقارنة.

ثانيا: الأرقام القياسية المرجحة للكميات:

وهي أربع أرقام:

(١) الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس (رقم لاسبير للكميات):

إذا كان ($ع_{س}$) هو السعر في سنة الأساس و ($ك_{س}$) هي الكمية في سنة الأساس ($ك_{م}$) هي الكمية في سنة المقارنة فإن معادلة رقم لاسبير للكميات تعطى بالمعادلة التالية:

$$\text{رقم لاسبير للكميات} = \frac{\sum ك_{م} \times ع_{س}}{\sum ك_{س} \times ع_{س}} \times ١٠٠\%$$

(٢) الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة المقارنة (رقم باش للكميات):

إذا كان ($ع_{م}$) هو السعر في سنة المقارنة و($ك_{م}$) هو الكمية في سنة المقارنة و($ك_{س}$) هي الكمية في سنة الأساس فإن معادلة رقم باش للكميات تعطى كالتالي:

$$\text{رقم باش للكميات} = \frac{\sum ك_{م} \times ع_{م}}{\sum ك_{س} \times ع_{م}} \times ١٠٠\%$$

(٣) الرقم القياسي الأمثل للكميات (رقم فيشر للكميات):

$$\text{رقم فيشر للكميات} = \sqrt{\text{رقم لاسبير للكميات} \times \text{رقم باش للكميات}}\ \%$$

(٤) رقم مارشال للكميات:

$$\text{رقم مارشال للكميات} = \frac{\sum ك_{م}\left(ع_{س} \times ع_{م}\right)}{\sum ك_{س}\left(ع_{س} \times ع_{م}\right)} \times ١٠٠\%$$

ونلاحظ بأن الأرقام القياسية المرجحة تعتمد على أوزان أو أسعار متغيرة بمعنى أنها تتغير إذا تغيرت نقط المقارنات فرقم لاسبير يتغير إذا تغيرت نقطة الأساس ورقم باش يتغير إذا تغيرت نقطة المقارنة ورقم مارشال يتغير إذا تغيرت الأساس أو المقارنة أو كليهما.

مثال (٤):

الجدول التالي يمثل أسعار وكميات أربع سلع في عامي ١٩٩٥، ١٩٩٧ باعتبار سنة ١٩٩٥ هي سنة الأساس. المطلوب:

(١) رقم لاسبير للأسعار.

(٢) رقم باش للأسعار.

(٣) رقم مارشال للأسعار.

(٤) رقم فيشر للأسعار.

(٥) رقم لاسبير للكميات.

(٦) رقم باش للكميات.

(٧) رقم فيشر للكميات.

(٨) رقم مارشال للكميات.

السلعة	السعر عام ١٩٩٥	السعر عام ١٩٩٧	الكمية عام ١٩٩٥	الكمية عام ١٩٩٧
أ	٦	٢٤	١٨	٣٦
ب	١٦	٣٢	١٤	٢٨
جـ	٣٦	١٨	١٠	٢٠
د	٨	١٠	١٢	١٤
المجموع	٦٦	٨٤	٥٤	٩٨

الحل:

بتكوين جدول على النحو التالي:

السلعة	$ع_س$	$ع_م$	$ك_س$	$ك_م$	$ع_س \times ك_س$	$ع_س \times ك_م$	$ع_م \times ك_س$	$ع_م \times ك_م$	$ك_س + ك_م$	$ع_س(ك_س+ك_م)$	$ع_م(ك_س+ك_م)$	$ع_س + ع_م$	$ك_س(ع_س+ع_م)$	$ك_م(ع_س+ع_م)$
أ	٦	٢٤	١٨	٣٦	١٠٨	٢١٦	٤٣٢	٨٦٤	٥٤	٣٢٤	١٢٩٦	٣٠	٥٤٠	١٠٨٠
ب	١٦	٣٢	١٤	٢٨	٢٢٤	٤٤٨	٤٤٨	٨٩٦	٤٢	٦٧٢	١٣٤٤	٤٨	٦٧٢	١٣٤٤
جـ	٣٦	١٨	١٠	٢٠	٣٦٠	٧٢٠	١٨٠	٣٦٠	٣٠	١٠٨٠	٥٤٠	٥٤	٥٤٠	١٠٨٠
د	٨	١٠	١٢	١٤	٩٦	١١٢	١٢٠	١٤٠	٢٦	٢٠٨	٢٦٠	١٨	٢١٦	٢٥٢
المجموع	٦٦	٨٤	٥٤	٩٨	٧٨٨	١٤٩٦	١١٨٠	٢٢٦٠		٢٢٨٤	٣٤٤٠		١٩٦٨	٣٧٥٦

(١) رقم لاسبير للأسعار $= \frac{\sum ع_م \times ك_س}{\sum ع_س \times ك_س} \times ١٠٠\%$

$= \frac{١١٨٠}{٧٨٨} \times ١٠٠\% = ١٤٩,٧٥\%$

(٢) رقم باش للأسعار $= \frac{\sum ع_م \times ك_م}{\sum ع_س \times ك_م} \times ١٠٠\%$

$= \frac{٢٢٦٠}{١٤٩٦} \times ١٠٠\% = ١٥١,٠٦\%$

(٣) رقم مارشال للأسعار $= \frac{\sum ع_م \left(ك_س + ك_م\right)}{\sum ع_س \left(ك_س + ك_م\right)} \times ١٠٠\%$

$= \frac{٣٤٤٠}{٢٢٨٤} \times ١٠٠\% = ١٥٠,٦١\%$

(٤) رقم فيشر للأسعار $= \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}}\ \%$

$= \sqrt{١٤٩,٧٥ \times ١٥١,٠٦}\ \% = ١٥٠,٤\%$

(٥) رقم لاسبير للكميات $= \frac{\sum ك_م \times ع_س}{\sum ك_س \times ع_س} \times ١٠٠\%$

$= \frac{١٤٩٦}{٧٨٨} \times ١٠٠\% = ١٨٩,٨٥\%$

(٦) رقم باش للكميات $= \frac{\sum ك_م \times ع_م}{\sum ك_س \times ع_م} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{٢٢٦٠}{١١٨٠} \times ١٠٠٪ = ١٩١,٥٣٪$$

(٧) رقم فيشر للكميات $= \sqrt{\text{رقم لاسبير للكميات} \times \text{رقم باش للكميات}}$ ٪

$$= \sqrt{١٨٩,٨٥ \times ١٩١,٥٣} ٪ = ١٩٠,٦٩٪$$

(٥) رقم مارشال للكميات $= \frac{\sum ك_م \left(ع_س + ع_م\right)}{\sum ك_س \left(ع_س + ع_م\right)} \times ١٠٠٪$

$$= \frac{٣٧٥٦}{١٩٦٨} \times ١٠٠٪ = ١٩٠,٨٥٪$$

نلاحظ من الحل بأن رقمي مارشال وفيشر متقاربين في القيمة.

تمارين الوحدة الثامنة

س١: ما هي استخدامات الرقم القياسي؟

س٢: عرف المفاهيم التالية:

الرقم القياسي، سنة الأساس، سنة المقارنة.

س٣: وضح كيف يتم اختيار سنة الأساس وما هي صفاتها؟

س٤: فيما يلي جدول يبين أسعار وكميات مبيعات مجموعة من السلع التي بيعت في عامي ١٩٨٥، ١٩٨٧.

السلعة	سعر الوحدة		كمية المبيعات	
	عام ١٩٨٥	عام ١٩٨٧	عام ١٩٨٥	عام ١٩٨٧
أ	٣٦	٣٢	٣٠٠	٣٨٠
ب	٢٨	٥٢	٤٠٠	٤٥٠
حـ	٢١	٢٧	٥٠٠	٥٦٠
د	٢٦	١٨	٦٠٠	٨٠٠
هـ	٤٠	٣٢	٧٠٠	١٠٠٠

المطلوب:

(١) استخرج منسوب السعر للسلعة أ، حـ

(٢) استخرج منسوب الكمية للسلعة د، هـ

(٣) استخرج الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.

(٤) استخرج الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.

(٥) استخرج الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

(٦) استخرج الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات.

(٧) رقم لاسبير للأسعار.

(٨) رقم لاسبير للكميات.

(٩) رقم باش للأسعار.

(١٠) رقم باش للكميات.

(١١) رقم فيشر للأسعار.

(١٢) رقم فيشر للكميات.

(١٣) رقم مارشال للأسعار.

(١٤) رقم مارشال للكميات.

س٥: لنفترض بأن لدينا مصنع ينتج ثلاث سلع أ، ب، حـ وأن كمية الإنتاج وسعر البيع من المصنع لهذه السلع في عامي ١٩٩٧، ١٩٩٩ كما يلي:

السلعة	الأسعار		كمية الإنتاج	
	عام ١٩٩٧	عام ١٩٩٩	عام ١٩٩٧	عام ١٩٩٩
أ	٨٠	٨١	٨٠	٩٠
ب	٨١	٨٥	١١٠	١٠٠
حـ	٨٢	٨٤	٩٠	٨٠
المجموع	٢٤٣	٢٥٠	٢٨٠	٢٧٠

معتبراً سنة ١٩٩٧ هي الأساس احسب ما يلي:

(١) رقم لاسبير للأسعار.

(٢) رقم باش للكميات.

س٦: إذا كان رقم لاسبير للأسعار يساوي ١١٧,٦٪ ورقم فيشر للأسعار يساوي ١٢٠,٢٪ أوجد رقم باش للأسعار.

س٧: إذا كان الرقم القياسي للتكاليف المعيشة عام ١٩٩٩ يساوي (٣) باعتبار سنة ١٩٩٨ هي الأساس بينما الرقم القياسي لدخل الفرد عام ١٩٩٩ يساوي (٢,٨) باعتبار سنة ١٩٩٨ هي الأساس أوجد القوة الشرائية لدخل الفرد.

س٨: الجدول التالي يبين أسعار وكميات أجهزة الكمبيوتر المباعة في إحدى الشركات المحلية في السنوات ٢٠٠٠، ٢٠٠١، ٢٠٠٢ كما في الجدول:

نوع الجهاز	الأسعار بالدينار الأردني			الكميات (جهاز)		
	عام ٢٠٠٠	عام ٢٠٠١	عام ٢٠٠٢	عام ٢٠٠٠	عام ٢٠٠١	عام ٢٠٠٢
بنتيوم I	٢٠٠	١٥٠	١٠٠	١٠٠٠	٨٠٠	٥٠٠
بنتيوم II	٣٥٠	٢٥٠	٢٠٠	١٠٠٠	١١٠٠	٨٠٠
بنتيوم III	٥٥٠	٤٥٠	٣٠٠	١٥٠٠	١٦٠٠	١٨٠٠
بنتيوم IV	٧٥٠	٦٥٠	٥٥٠	٥٠٠	١٠٠٠	٢٠٠٠

باعتبار سنة ٢٠٠٠ هي الأساس المطلوب:

(١) منسوب القيمة للجهاز بنتيوم II، III.

$$\left(\text{منسوب القيمة} = \frac{\text{السعر} \times \text{الكمية في سنة المقارنة}}{\text{السعر} \times \text{الكمية في سنة الأساس}} \right)$$

(٢) الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة.

(٣) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.

(٤) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.

(٥) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.

(٦) رقم مارشال للأسعار.

(٧) رقم مارشال للكميات.

الوحدة التاسعة

٩

السلاسل الزمنية

The Time Series

مقدمة.

(٩-١) معامل الخشونة والمعدّلات المتحركة.

(٩-٢) تحليل السلسلة الزمنية.

(٩-٣) طرق تقدير الاتجاه العام.

(٩-٤) تقدير التغيرات الموسمية.

تمارين الوحدة.

السلاسل الزمنية

The Time Series

مقدمة:

بمرور الزمن فإن معظم الظواهر تتعرض للتغير. ففي حين تحتاج بعض الظواهر لمدة سنة أو أكثر لتتغير فإن البعض الآخر قد يتعرض كل لحظة أو كل دقيقة أو ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر. وبالتالي يمكن تعريف السلسلة الزمنية بأنها البيانات الإحصائية التي أخذت أو سجلت عن ظاهرة ما خلال فترات زمنية متتالية والفترة الزمنية كما أسلفنا قد تكون دقيقة أو ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر أو سنة أو أكثر.

وعلى سبيل المثال الجدول التالي يبين إنتاج أحد المصانع للأسمنت (بالآلاف الأطنان) خلال الفترة من ١٩٩٠ إلى ١٩٩٦:

السنة	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
الإنتاج	٣٥٠	٣٢٠	٤٠٠	٤٥٠	٥٠٠	٤٣٠	٤٠٠

نلاحظ بأن أي سلسلة زمنية تحتوي على متغيرين. الأول هو الزمن ويعتبر هذا المتغير مستقل. أما الثاني فهو قيمة الظاهرة قيد الدراسة ويعتبر المتغير التابع.

وتهدف دراسة السلاسل الزمنية إلى:

(١) وصف سلوك الظاهرة في الماضي.

(٢) تحليل هذا السلوك للتنبؤ بسلوكها في المستقبل.

(٩-١) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة:

عند رسم المنحنى البياني المار بالنقط (الزمن، قيمة الظاهرة) نحصل على منحنى غير أملس نتيجة التغيرات المتعددة التي تحدث في الفترات الزمنية الطويلة التي أخذت منها بيانات السلسلة الزمنية.

تعريف:

لتكن $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ عناصر السلسلة الزمنية التي أخذت في الأزمان ١، ٢، ...، ن فإن معامل الخشونة لهذه السلسلة الزمنية والذي سنرمز له بالرمز (م.خ) يعطى وفق المعادلة التالية:

$$م.خ = \frac{\sum_{ر=٢}^{ن}\left(س_ر - س_{ر-١}\right)^٢}{\sum_{ر=٢}^{ن}\left(س_ر - \overline{س}\right)^٢}$$

وكلما قل هذا المعامل نسبيا كلما كانت السلسلة الزمنية ملساء أكثر.

مثال (١):

البيانات الآتية تمثل عدد الخريجين من إحدى كليات المجتمع في الفترة الزمنية (١٩٩٠- ١٩٩٩).

السنة	عدد الخريجين بالمئات	السنة	عدد الخريجين بالمئات
١٩٩٠	١٨	١٩٩٥	١١
١٩٩١	١٧	١٩٩٦	١٢
١٩٩٢	١٢	١٩٩٧	١٣
١٩٩٣	١١	١٩٩٨	١٤
١٩٩٤	٩	١٩٩٩	١٥

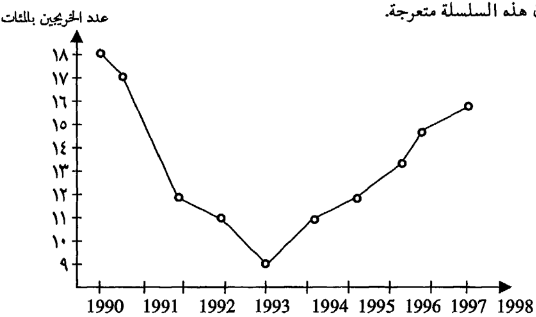
المطلوب:

(١) رسم المنحنى التاريخي لهذه السلسلة الزمنية.

(٢) معامل الخشونة لهذه السلسلة.

الحل:

نقوم برسم محورين متعامدين نضع على الرأسي (قيمة الظاهرة)، وعلى الأفقي الزمن نلاحظ بأن سلوك هذه الظاهرة مرة بالزيادة وأخرى بالنقصان وبالتالي فإن هذه السلسلة متعرجة.



(٢) نقوم أولا: بإيجاد الوسط الحسابي لعناصر السلسلة الزمنية كما يلي:

$$\frac{{}_{ر=2}^{ن}\left(س_ر - س_{ر-1}\right)^2}{{}_{ر=2}^{ن}\left(س_ر - \overline{س}\right)^2}$$

ثانياً: نكون جدول الحل كالتالي:

الزمن	س ر	س ر-١	س ر − س ر-١	(س ر − س ر-١)٢	(س ر − س̄)	(س ر − س̄)٢
١	١٨	−	−	−	−	−
٢	١٧	١٨	١-	١	٣,٨	١٤,٤٤
٣	١٢	١٧	٥-	٢٥	١,٢-	١,٤٤
٤	١١	١٢	١-	١	٢.٢-	٤,٨٤
٥	٩	١١	٢-	٤	٤,٢-	١٧,٦٤
٦	١١	٩	٢	٤	٢.٢-	٤,٨٤
٧	١٢	١١	١	١	١,٢-	١,٤٤
٨	١٣	١٢	١	١	٠,٢-	٠,٠٤
٩	١٤	١٣	١	١	٠,٨	٠,٦٤
١٠	١٥	١٤	١	١	١,٨	٣,٢٤
المجموع				٣٩		٤٨,٥٦

$$\therefore \text{م.خ} = \frac{\sum_{\text{ر}=٢}^{١٠}\left(\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}\right)^{٢}}{\sum_{\text{ر}=٢}^{١٠}\left(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}\right)^{٢}} = \frac{٣٩}{٤٨,٥٦} = ٠,٨٠٣$$

ونلاحظ بأن معامل الخشونة كبير نسبياً وبالتالي يصعب تحليل مثل هذه السلسلة الزمنية.

تعريف:

لتكن لدينا السلسلة الزمنية $\text{س}_١$، $\text{س}_٢$، ...، $\text{س}_{\text{ن}}$ والتي أخذت في الأزمنة ١، ٢، ... ، ن فيتم تعريف المعدل المتحرك بطول (ك) والذي سنرمز له بالرمز ($\text{م}_{\text{ر}}$) بالمعادلة التالية:

$$\text{م}_{\text{ر}} = \frac{\text{س}_{\text{ر}} + \text{س}_{\text{ر}+١} + \ldots + \text{س}_{\text{ر}+(\text{ك}-١)}}{\text{ك}} \qquad \text{حيث ر} = ١، ٢، \ldots.$$

مثال (٢):

بالرجوع إلى السلسلة الزمنية الموجودة في المثال السابق احسب سلسلة المعدلات المتحركة بطول (٥).

الحل:

المعدل المتحرك رقم (١) = $\text{م}_١ = \frac{\text{س}_١+\text{س}_٢+\text{س}_٣+\text{س}_٤+\text{س}_٥}{٥}$

$$= \frac{١٨ + ١٧ + ١٢ + ١١ + ٩}{٥} = \frac{٦٧}{٥} = ١٣,٤$$

$$\text{م}_٢ = \frac{\text{س}_٢+\text{س}_٣+\text{س}_٤+\text{س}_٥+\text{س}_٦}{٥} = \frac{١٧ + ١٢ + ١١ + ٩ + ١١}{٥} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$$

$$\text{م}_٣ = \frac{\text{س}_٣+\text{س}_٤+\text{س}_٥+\text{س}_٦+\text{س}_٧}{٥} = \frac{١٢ + ١١ + ٩ + ١١ + ١٢}{٥} = \frac{٥٥}{٥} = ١١$$

$$\text{م}_٤ = \frac{\text{س}_٤+\text{س}_٥+\text{س}_٦+\text{س}_٧+\text{س}_٨}{٥} = \frac{١١ + ٩ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٥٦}{٥} = ١١,٢$$

$$\text{م}_٥ = \frac{\text{س}_٥+\text{س}_٦+\text{س}_٧+\text{س}_٨+\text{س}_٩}{٥} = \frac{٩ + ١١ + ١٢ + ١٣ + ١٤}{٥} = \frac{٥٩}{٥} = ١١,٨$$

$$\text{م}_٦ = \frac{\text{س}_٦+\text{س}_٧+\text{س}_٨+\text{س}_٩+\text{س}_{١٠}}{٥} = \frac{١١ + ١٢ + ١٣ + ١٤ + ١٥}{٥} = \frac{٦٥}{٥} = ١٣$$

وبالتالي فإن سلسلة المعدلات المتحركة هي:

١٣,٤، ١٢، ١١، ١١,٢، ١١,٨، ١٣.

(٩-٢) تحليل السلسلة الزمنية:

إن دراسة أي سلسلة زمنية تستدعي تحليلها إلى عناصرها، وثاني أهمية التحليل لمعرفة تطور الظاهرة مع مرور الزمن ومعرفة سلوكها والتنبؤ بمعاملها خلال فترات مقبلة لتتخذ أساساً للتخطيط الاقتصادي. وتتألف السلسلة الزمنية من أربعة عناصر أساسية هي:

(١) الاتجاه العام (القيم الاتجاهية) ونرمز له بالرمز (ت).

(٢) التغيرات الموسمية (القيم الموسمية) ونرمز له بالرمز (م).

(٣) التغيرات الدورية (القيم الدورية) ونرمز له بالرمز (د).

(٤) التغيرات العرضية (القيم العرضية) ونرمز له بالرمز (ع).

وبالتالي فإن كل قيمة أصلية (ص) من قيم الظاهرة في كل سنة من السنوات يمكن وصفها بالشكل التالي:

ص = ت × م × د × ع

إلا أن بعض الإحصائيين يكتبها ص = ت + م + د + ع.

ودراسة سلسلة زمنية ما تستدعي دراسة كل عنصر من هذه العناصر.

أولاً: الاتجاه العام:

والاتجاه العام يعني التغير العام في المدى الطويل لهذه السلسلة الزمنية وليس هناك أن يكون للاتجاه العام شكل معين ثابت ولكن تعني أن هناك حركة دائمة في اتجاه معين (أعلى أو اسفل) والعوامل المختلفة التي تشكل الاتجاه العام لأي ظاهرة تؤدي إلى زيادة قيمة الظاهرة أو نقصها.

وفي معظم الأحيان يكون تأثير تلك العوامل بصورة منتظمة بشكل بطيء وصغير ويظهر تأثيرها بعد فترة طويلة من الزمن وذلك ما يجعلنا نصِّف الاتجاه العام بأنه التغير في المدى الطويل لتلك الظاهرة، وبالتالي لا يكون الاتجاه العام للظاهرة عرضة للتغيرات العرضية سواء بالزيادة أو النقصان. الاتجاه العام قد يمثل رياضياً بخط مستقيم أو منحني ويعتمد شكل الاتجاه العام على نوع النمو للظاهرة قيد الدراسة.

ثانياً: التغيرات الموسمية:

والموسم في السلسلة الزمنية نعني به الفترة الزمنية التي هي أقل من سنة فقد تكون ساعة أو يوم أو أسبوع أو شهر أو ربع سنة ... الخ. وباختلاف نوع الظاهرة وظروفها تختلف الفترة الزمنية التي بمرورها تتكرر الظاهرة نفسها. وبالتالي يمكن

تعريف التغيرات الموسمية هي تلك التغيرات التي تكرر نفسها بالنسبة لظاهرة ما خلال تلك الفترة الزمنية.

فمثلاً درجة الحرارة لها دورة يومية حيث تبدأ درجة الحرارة منخفضة في أول اليوم ثم تزداد تدريجياً خلال اليوم حتى تصل إلى أعلى مستوى لها في منتصف النهار لتعود إلى الانخفاض التدريجي حين تقترب من نهاية اليوم ثم تبدأ منخفضة في اليوم التالي وتزداد تدريجياً وهكذا تتكرر الدورة كل يوم وبالتالي فهذه التغيرات الموسمية مدتها يوم واحد. وكمثال على التغيرات الموسمية التي مدتها أسبوع هي أعداد المصلين لصلاة الجمعة وكمثال على التغيرات الموسمية التي مدتها ربع سنة هي الفصول الأربعة.

ثالثاً: التغيرات الدورية:

كما تحدث التغيرات الموسمية بشكل منتظم فإن التغيرات الدورية تحدث أيضاً بشكل منتظم ولكن على فترات متباعدة ففي حين تكون التغيرات الموسمية مدتها أقل من سنة فإن التغيرات الدورية مدتها أكثر من سنة وقد تمتد لعشرة سنوات أو عشرون سنة .. وهذه التغيرات يصعب التنبؤ بها ولكن تعتمد على المعاملات الاقتصادية في البلد وتختلف من بلد إلى آخر ومن الأمثلة عليها حالة الكساد والرواج الاقتصادي. لذلك فطول الدورة هي تلك الفترة التي تمضي قبل أن تستعيد الظاهرة حالتها العادية.

رابعاً: التغيرات العرضية أو الفجائية:

وهي التغيرات التي تحدث نتيجة أسباب عرضية أو طارئة وهذه التغيرات يمكن تقسيمها إلى قسمين:

أ) التغيرات التي تعتمد على الصدفة البحتة وهي التغيرات العشوائية وتحدث تغيرات في السلسلة لا يمكن التنبؤ بها فتارة تكون في اتجاه وأخرى تكون في آخر بصورة عشوائية.

ب) التغيرات التي تعتمد على عوامل فجائية طارئة ولكنها قوية تظهر من وقت لآخر كالحروب والزلازل والأمراض وغيرها.

(٩-٣) طرق تقدير معادلة الاتجاه العام (القيم الاتجاهية للظاهرة):

الهدف من تقدير الاتجاه العام للظاهرة هو وصف الظاهرة أو الحركة العامة للظاهرة، ويتم ذلك عن طريق الرسم البياني للظاهرة، فإذا كان انتشار هذه النقط يمكن تمهيدها بخط مستقيم فيكون الاتجاه العام مستقيماً إما صاعداً من الأسفل إلى الأعلى مشيراً إلى زيادة قيمة الظاهرة بمرور الزمن، وأما إذا كان هابطاً من أعلى إلى اسفل فإن ذلك يعني أن الظاهرة تندرج في التناقص مع مرور الزمن.

من ناحية أخرى فقد لا يأخذ الاتجاه العام شكل الخط المستقيم بل شكل منحنى فإن تمثيله رياضياً يتطلب اللجوء إلى معادلات أعلى من الدرجة الأولى.

وبشكل عام فعندما يتم تمهيد خط أو منحنى الاتجاه العام فإنه يتوافر لدينا لكل وحدة زمنية قيمتان إلا وهي القيمة الحقيقة للظاهرة (ص) والقيمة الاتجاهية المقدرة (ص).

هنالك عدة طرق لتقدير الاتجاه العام (القيم الاتجاهية) تتفاوت في دقتها وهذه الدقة تتحدد بمقارنة القيمة الحقيقة مع القيمة الاتجاهية ومن هذه الطرق:

(١) طريقة التمهيد باليد:

تعتبر هذه الطريقة أسهل الطرق، ويتم فيها رسم محورين أحدهما رأسي يعبر عن القيم للظاهرة والثاني أفقي يعبر عن الزمن ثم نقوم بتعيين الإحداثيات (الزمن، قيمة الظاهرة) ثم نوصل هذه النقط. لنحصل على منحنى القيم المشاهدة فإذا كان شكل الاتجاه العام مستقيما فتكون معادلة الاتجاه العام معادلة خط مستقيم وإذا كان منحنى فقد تكون معادلته من الدرجة الثانية أو أكثر.

وبالنظر إلى شكل المنحنى للقيم المشاهدة يقوم محلل السلسلة بتمهيد خط أو منحنى للقيم الاتجاهية معتمداً على قدرته وخبرته حتى يمر هذا الخط أو المنحنى بأكبر عدد من النقط للقيم المشاهدة.

وتعتبر هذه الطريقة أقل الطرق دقة لأنها تعتمد على مهارة المحلل.

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

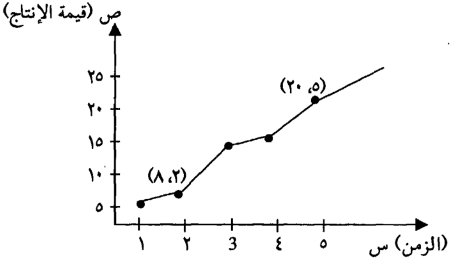
مثال (٣):

الجدول التالي يمثل إنتاج المملكة بالآلاف الأطنان من الإسمنت خلال السنوات (١٩٨٠-١٩٨٤).

السنة	الزمن (س)	قيمة الإنتاج (ص)
١٩٨٠	١	٥
١٩٨١	٢	٨
١٩٨٢	٣	١٢
١٩٨٣	٤	١٥
١٩٨٤	٥	٢٠

الحل:

نقوم برسم محوري الإحداثيات ثم نقوم بتعيين الإحداثيات (س، ص).



نقوم بتعويض في معادلة الخط المستقيم ص = م س + حـ حيث أن الخط المستقيم يمر بالنقطتين (٢، ٨)، (٥، ٢٠) كالتالي:

٨ = ٢ م + حـ .... (١)

٢٠ = ٥ م + خـ .... (٢)

بضرب المعادلة الأولى بـ (-١) وجمعها للثانية ينتج:

$١٢ = ٣م \Leftarrow م = ٤$

بالتعويض عن قيمة (م) في (١) ينتج بأن حـ = صفر

∴ المعادلة هي: ص = ٤ س.

(٢) طريقة نصف السلسلة:

في هذه الطريقة نقوم بتقسيم السلسلة الزمنية إلى قسمين، ثم نجد الوسط الحسابي لقيم الظاهرة (ص) لكل قسم والوسط الحسابي لقيم الزمن (س) لكل قسم ثم نستخدم القيمتين المتوسطتين $\left(\bar{س}_١، \bar{ص}_١\right)$، $\left(\bar{س}_٢، \bar{ص}_٢\right)$ ليمثلا نقطتين على الخط المستقيم ثم نوجد معادلته.

ولتوضيح هذه الطريقة نطرح المثال التالي:

مثال (٤):

الجدول التالي يبين إنتاج المملكة من الفوسفات (بالآلاف الأطنان) خلال السنوات (١٩٨٠-١٩٨٩).

السنة	الزمن (س)	قيمة الظاهرة (ص)
١٩٨٠	١	٥
١٩٨١	٢	٨
١٩٨٢	٣	١٢
١٩٨٣	٤	٢٠
١٩٨٤	٥	٢٣
١٩٨٥	٦	٢٥
١٩٨٦	٧	٢٧
١٩٨٧	٨	٢٨
١٩٨٨	٩	٢٩
١٩٨٩	١٠	٣٠

الحل:

نقوم بتقسيم السلسلة إلى قسمين متساويين حيث القسم الأول يشمل الخمس السنوات الأولى والقسم الثاني يشمل الخمس السنوات الثانية.

السنة	الزمن (س)	قيمة الظاهرة (ص)	
١٩٨٠	١	٥	$\bar{س}_1 = \frac{5+4+3+2+1}{5} = \frac{15}{5} = 3$
١٩٨١	٢	٨	$\bar{ص}_١ = \frac{٥+٨+١٢+٢٠+٢٣}{٥}$
١٩٨٢	٣	١٢	$= \frac{٦٨}{٥} = ١٣,٦$
١٩٨٣	٤	٢٠	
١٩٨٤	٥	٢٣	
١٩٨٥	٦	٢٥	$\bar{س}_٢ = \frac{٦+٧+٨+٩+١٠}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$
١٩٨٦	٧	٢٧	$\bar{ص}_٢ = \frac{٢٥+٢٧+٢٨+٢٩+٣٠}{٥}$
١٩٨٧	٨	٢٨	$= ٢٧,٨$
١٩٨٨	٩	٢٩	
١٩٨٩	١٠	٣٠	

نقوم الآن بإيجاد معادلة الخط المستقيم والتي تمثل معادلة الاتجاه العام المار بالنقطتين (٣، ١٣,٦)، (٨، ٢٧,٨) كالتالي:

معادلة الخط المستقيم (معادلة الاتجاه العام) هي: ص = م س + حـ

بالتعويض النقطتين في المعادلة:

١٣,٦ = ٣ م + حـ .... (١)

٢٧,٨ = ٨ م + حـ .... (٢)

بطرح المعادلة (١) من (٢) ينتج:

١٤,٢ = ٥ م

$\Leftarrow$ م = $\frac{١٤,٢}{٥}$ = ٢,٨٤

بالتعويض في (١) ينتج:

١٣,٦ = ٨,٥٢ + حـ $\Leftarrow$ حـ = ٥,٠٨

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

ص = ٢,٨٤ س + ٥,٠٨

ملاحظة: إذا كان عدد السنوات فردياً فإننا نقوم بحذف السنة الواقعة في المنتصف.

(٣) طريقة المعدلات المتحركة:

تعتمد هذه الطريقة على أخذ متوسطات متتابعة متداخلة والنتيجة هي إزالة التعرجات التي تظهر في المنحنى التاريخي للسلسلة. وتكمن أهمية هذه الطريقة إذا رسمنا السلسلة الزمنية الأصلية ثم رسمنا على نفس المستوى سلسلة المعدلات المتحركة فنجد بأن الخط البياني قد تغير شكله بحيث لم يصبح متعرجاً وأصبح في صورة خط مستقيم ومما يجب ملاحظته بأن الخط المتعرج ليس دائماً خطاً مستقيماً ففي هذه الحالة نلجأ إلى أخذ سلسلة متوسطات متحركة أخرى.

وتتخلص عيوب هذه الطريقة في الحصول على قيم اتجاهية تقل عن القيم المشاهدة (ص) ويزداد هذا العيب وضوحاً إذا كان عدد المشاهدات قليلاً وكذلك فإنه في هذه الطريقة لا نحصل على معادلة رياضية للاتجاه العام مما يجعل التنبؤ بقيم اتجاهية في فترة زمنية لاحقة أمراً مستحيلاً.

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

مثال (٥):

الجدول التالي يمثل عدد خريجي إحدى الكليات التابعة لجامعة البلقاء التطبيقية بالمئات خلال السنوات (١٩٩٠-١٩٩٧) [بيانات افتراضية].

السنة	الزمن (س)	قيمة المشاهدة (ص)	المعدل المتحرك بطول ٣
١٩٩٠	١	١٢	-
١٩٩١	٢	١١	١٢
١٩٩٢	٣	١٣	١١
١٩٩٣	٤	٩	١٠
١٩٩٤	٥	٨	٩
١٩٩٥	٦	١٠	٩,٦٧
١٩٩٦	٧	١١	١١
١٩٩٧	٨	١٢	-

فنلاحظ أن المعدل المتحرك الأول يقابل الوسيط لأول ثلاثة أزمنة وهو الزمن الثاني.

(٤) طريقة المربعات الصغرى:

تعتبر هذه الطرق أفضل الطرق لأن في هذه الطريقة يتم تحديد معادلة الاتجاه العام على أساس أن يكون مجموع مربعات انحراف القيم المحسوبة عن القيم الأصلية أقل ما يمكن ومن هنا جاءت التسمية.

ولاستخدام هذه الطريقة يجب أن تحدد الشكل العام (الانتشار) للظاهرة وذلك برسم المنحنى التاريخي ومن هذا الرسم يتضح لنا إن كان الاتجاه العام يأخذ شكل الخط المستقيم أو منحنى من الدرجة الثانية أو أكثر.

فإذا كان الاتجاه العام على شكل خط مستقيم فإن معادلته هي:

ص = م س + حـ

حيث م، حـ هي معالم المعادلة المراد إيجادها باستخدام قيم س، ص المشاهد وسنقتصر دراستنا على معادلة الخط المستقيم فقط.

وفي هذه الحالة تكون معادلة الاتجاه العام هي معادلة الخط المستقيم:

ص = م س + حـ

حيث م = $\dfrac{\sum \text{س ص} - \text{ك} \ \overline{\text{س}} \ \overline{\text{ص}}}{\sum \text{س}^{2} - \text{ك} \ \overline{\text{س}}^{2}}$

حيث ك: عدد السنوات (عدد عناصر السلسلة الزمنية).

حـ = $\overline{\text{ص}} - \text{م} \ \overline{\text{س}}$

ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال التالي:

مثال (٦):

الجدول التالي يبين الكميات المنتجة بالآلاف الأطنان من إنتاج أحد المصانع خلال السنوات (١٩٧١-١٩٨٠).

السنة	١٩٧١	١٩٧٢	١٩٧٣	١٩٧٤	١٩٧٥	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠
الإنتاج	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٥	١٨	٢٠	٢١

المطلوب:

(١) حساب معادلة خط الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

(٢) حساب القيم الاتجاهية (ص) خلال السنوات (١٩٧١-١٩٨٠) والتنبؤ بالكميات المنتجة عام ١٩٨٥، ١٩٩٠.

الحل: بتكوين جدول الحل كالتالي:

السنة	الزمن (س)	قيمة الإنتاج (ص)	س^{2}	س ص	ص (القيم الاتجاهية)=١,٧٩ س + ٢,٦٥٥
١٩٧١	١	٦	١	٦	ص = ١,٧٩ × ١ + ٢,٦٥٥ = ٤,٤٤٥
١٩٧٢	٢	٧	٤	١٤	ص = ١,٧٩ × ٢ + ٢,٦٥٥ = ٦,٢٣٥
١٩٧٣	٣	٨	٩	٢٤	ص = ١,٧٩ × ٣ + ٢,٦٥٥ = ٨,٠٢٥
١٩٧٤	٤	٩	١٦	٣٦	ص = ١,٧٩ × ٤ + ٢,٦٥٥ = ٩,٨١٥

١٩٧٥	٥	١٠	٢٥	٥٠	ص = ١,٧٩ × ٥ + ٢,٦٥٥ = ١١,٦٠٥
١٩٧٦	٦	١١	٣٦	٦٦	ص = ١,٧٩ × ٦ + ٢,٦٥٥ = ١٣,٣٩٥
١٩٧٧	٧	١٥	٤٩	١٠٥	ص = ١,٧٩ × ٧ + ٢,٦٥٥ = ١٥,٧١٨٥
١٩٧٨	٨	١٨	٦٤	١٤٤	ص = ١,٧٩ × ٨ + ٢,٦٥٥ = ١٦,٩٧٥
١٩٧٩	٩	٢٠	٨١	١٨٠	ص = ١,٧٩ × ٩ + ٢,٦٥٥ = ١٨,٧٦٥
١٩٨٠	١٠	٢١	١٠٠	٢١٠	ص = ١,٧٩ × ١٠ + ٢,٦٥٥ = ٢٠,٥٥٥
المجموع	٥٥	١٢٥	٣٨٥	٨٣٥	

معادلة الاتجاه العام هي: ص = م س + حـ

حيث:

$$\text{م} = \frac{\sum \text{س ص} - \overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sum \text{س}^{٢} - \text{ك}\overline{\text{س}}^{٢}} = \frac{٨٣٥ - ١٠ \times \frac{٥٥}{١٠} \times \frac{١٢٥}{١٠}}{٣٨٥ - ١٠ \times \left(\frac{٥٥}{١٠}\right)^{٢}} = \frac{١٤٧,٥}{٨٢,٥}$$

$$= ١,٧٩$$

$$\text{حـ} = \overline{\text{ص}} - \text{م}\overline{\text{س}} = ١٢,٥ - ١,٧٩ \times ٥.٥ = ٢,٦٥٥$$

∴ المعادلة هي: ص = ١,٧٩ س + ٢,٦٥٥

(٢) القيم الاتجاهية خلال السنوات (١٩٧١-١٩٨٠) واردة في جدول الحل.

للتنبؤ بالقيمة الاتجاهية لعام ١٩٨٥ نقول بأن:

عام ١٩٨٥ تقابل س = ١٥ والتعويض في معادلة الاتجاه العام نرى:

ص = ١,٧٩ × ١٥ + ٢,٦٥٥ = ٢٩,٥٠٥

كذلك الحال لعام ١٩٩٠ تقابل س = ٢٠ والتعويض نجد أن:

ص = ١,٧٩ × ٢٠ + ٢,٦٥٥ = ٣٨,٤٥٥

(٩-٤) تقدير التغيرات الموسمية:

تهدف دراسة التغيرات الموسمية إلى التعرف على أثر تغير الموسم على سلوك الظاهرة قيد الدراسة. فإذا كانت الظاهرة تتغير من يوم لآخر فتكون الوحدة الزمنية لهذه الظاهرة هي اليوم وقد تتغير الظاهرة بتغير الفصول الأربعة فتكون الوحدة الزمنية هي الفصول الأربعة وقد تكون الوحدة الزمنية في التغيرات الموسمية أسبوعاً أو شهراً ... الخ.

لكي يتم تقدير أثر الموسم لظاهرة ما فيجب:

(١) تخليص قيمة الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

(٢) تخليص قيمة الظاهرة من أثر التغيرات العرضية أو الدورية ويتم ذلك عن طريق استخدام فكرة المتوسطات.

لبيان كيفية حساب أثر التغيرات الموسمية نورد المثال التالي:

مثال (٧):

إذا كانت مبيعات أحد المتاجر (بالآلاف الدنانير) خلال ثلاثة أعوام (١٩٩٧-٢٠٠٠) على النحو التالي:

الفصل	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الشتاء	٩	١٢	٢٥
الربيع	١٢	١٥	١٧
الصيف	١٠	١٣	٢١
الخريف	١٤	١٧	١٩
المجموع	٤٥	٥٧	٨٢

المطلوب: حساب أثر التغيرات الموسمية.

الحل:

لحساب أثر التغيرات الموسمية يجب أولاً تخليص القيم للسلسلة الزمنية من أثر الاتجاه العام، نستخدم طريقة المربعات الصغرى لإيجاد معادلة الاتجاه العام على فرض بأن معادلة الاتجاه العام هي معادلة خط مستقيم.

السنة	الموسم	س	ص	س²	س ص	القيم الاتجاهية (ص)	القيم مخلصة من أثر الاتجاه العام
١٩٩٨	الشتاء	١	٩	١	٩	٩,٤٠٧	$\frac{٩}{٩,٤٠٧}$ × ١٠٠٪ = ٩٥,٦٧٪
	الربيع	٢	١٢	٤	٢٤	١٠,٤٨٤	١١٤,٤٦٪
	الصيف	٣	١٠	٩	٣٠	١١,٥٦١	٨٦,٤٩٪
	الخريف	٤	١٤	١٦	٥٦	١٢,٦٣٨	١١٠,٧٨٪
١٩٩٩	الشتاء	٥	١٢	٢٥	٦٠	١٣,٧١٥	٨٧,٤٩٪
	الربيع	٦	١٥	٣٦	٩٠	١٤,٧٩٢	١٠١,٤٪
	الصيف	٧	١٣	٤٩	٩١	١٥,٨٦٥	٨١,٩٤٪
	الخريف	٨	١٧	٦٤	١٣٦	١٦,٩٤٦	١٠٠,٣١٪
٢٠٠٠	الشتاء	٩	٢٥	٨١	٢٢٥	١٨,٠٢٣	١٣٨,٧١٪
	الربيع	١٠	١٧	١٠٠	١٧٠	١٩,١	٨٩٪
	الصيف	١١	٢١	١٢١	٢٣١	٢٠,١٧٧	١٠٤,٠٧٪
	الخريف	١٢	١٩	١٤٤	٢٢٨	٢١,٢٥٤	٨٩,٣٩٪
المجموع	–	٧٨	١٨٤	٦٥٠	١٣٥٠		

نجد $\bar{س} = \frac{٧٨}{١٢}$ = ٦,٥، $\bar{ص} = \frac{١٨٤}{١٢}$ = ١٥,٣٣

معادلة الاتجاه العام هي: ص = م س + حـ

$$\text{حيث م} = \frac{\sum \text{س ص} - \text{ك}\ \bar{\text{س}}\ \bar{\text{ص}}}{\sum \text{س}^{٢} - \text{ك}\ \bar{\text{س}}^{٢}} = \frac{١٣٥٠ - ١٢ \times ٦,٥ \times \frac{١٨٤}{١٢}}{٦٥٠ - ١٢ \times (٦,٥)^{٢}}$$

$$= \frac{١٥٤}{١٤٣} = ١,٠٧$$

$$\text{حـ} = \bar{\text{ص}} - \text{م}\ \bar{\text{س}} = ١٥,٣٣ - ١,٠٧ \times ٦,٥ = ٨,٣٣$$

$$\therefore\ \text{ص} = ١,٠٧\ \text{س} + ٨,٣٣$$

ويتم تخليص القيم الأصلية من أثر الاتجاه العام باستخدام المعادلة التالية:

$$\frac{\text{ص}}{\text{ص}} \times ١٠٠\%$$

النسب المئوية في العمود الأخير في الجدول تمثل أثر التغيرات الأخرى (الموسمية والدورية والفجائية) على سلوك الظاهرة.

في المرحلة التالية يتم التخلص من أثر التغيرات الفجائية أو العرضية باستخدام المتوسطات ليبقى لدينا أثر التغيرات الموسمية والدورية.

وباستخدام سلسلة البيانات مخلصة من أثر الاتجاه العام وأثر التغيرات الفجائية يمكن أن يوجد دليلاً يساعد في حساب أثر الموسم على حركة الظاهرة ويطلق عليه "دليل الحركة الموسمية" ويتم الحصول عليه كالآتي:

الفصل	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	مجموع السنوات	المتوسط "الدليل الموسمي"
الشتاء	٩٥,٦٧	٨٧,٤٩	١٣٨,٧١	٣٢١,٨٧	$\frac{٣٢١,٨٧}{٣} = ١٠٧,٢٩$
الربيع	١١٤,٤٦	١٠١,٤	٨٩	٣٠٤,٨٦	١٠١,٦٢
الصيف	٨٦,٤٩	٨١,٩٤	١٠٤,٠٧	٢٧٢,٥	٩٠,٨٣
الخريف	١١٠,٧٨	١٠٠,٣١	٨٩,٣٩	٣٠٠,٤٨	١٠٠,١٦
المجموع					٣٩٩,٩

مما يلاحظ أنه يجب أن تكون لدينا أكثر من سنة حتى يمكن التخلص من أثـر التغيرات العرضية عن طريق أخذ متوسط السنوات المختلفة لكل فصل من فصول السنة، وكما تجدر الإشارة بأن المجموع للمتوسطات (لـ مجموع الدليل الموسمي) يجـب أن يساوي عدد الفصول × ١٠٠ وبالتالي فإن المتوسـط العـام يجـب أن يسـاوي ١٠٠٪ وإن حدث وإن كان أقل أو أكثر فإن الفرق يوزع بالتناسب على المتوسطات الأربعة.

استبعاد التغيرات الموسمية:

بعد حساب التغيرات الموسمية التي ظهرت على شـكل نسـب أطلقنـا عليـها الدليل الموسمي فإنه يتم التخلص من أثر التغيرات الموسمية باستخدام المعادلة التالية:

$$\text{القيمة مخلصة من أثر الموسمي} = \frac{\text{القيمة المشاهدة (ص)}}{\text{الدليل الموسمي}} \times ١٠٠\%$$

والجدول التالي يبين القيم مخلصة من الأثر الموسمـي للمثـال "مبيعـات إحـدى المتاجر".

السنة	الفصل	ص	القيم مخلصة من الأثر الموسمي
١٩٩٨	الشتاء	٩	$\frac{٩}{١٠٧,٢٩} \times ١٠٠\% = ٨,٣٩$
	الربيع	١٢	١١,٨
	الصيف	١٠	١٢,٢
	الخريف	١٤	١٣,٩٧
١٩٩٩	الشتاء	١٢	١١,١٨
	الربيع	١٥	١٤,٧٦
	الصيف	١٣	١٤,٣١
	الخريف	١٧	١٦,٩٧

٢٠٠٠	الشتاء	٢٥	٢٣,٣
	الربيع	١٧	١٦,٧٣
	الصيف	٢١	٢٣,١٢
	الخريف	١٩	١٨,٩٧

وكيفية حساب القيمة مخلصة من الأثر الموسمي لفصل الربيع (١٩٩٨-٢٠٠٠) كالتالي:

عام (١٩٩٨): $\frac{١٢}{١٠١,٦٢} \times ١٠٠\% = ١١,٨$

عام (١٩٩٩): $\frac{١٥}{١٠١,٦٢} \times ١٠٠\% = ١٤,٧٦$

عام (٢٠٠٠): $\frac{١٥}{١٠١,٦٢} \times ١٠٠\% = ١٦,٧٣$

ولتخليص قيم السلسلة الزمنية لظاهرة ما من أثر التغيرات الموسمية والاتجاه العام نطبق المعادلة التالية:

$$\text{التغيرات الدورية والعرضية} = \frac{\text{قيمة المشاهدة للظاهرة}}{\text{الاتجاه العام} \times \text{الدليل الموسمي}} \times ١٠٠\%$$

وعندها يظهر أثر التغيرات الدورية والعرضية فقط.

تمارين الوحدة التاسعة

س١: عرف المفاهيم التالية:

السلسلة الزمنية، الاتجاه العام، التغيرات الدورية، التغيرات الموسمية، الدليل الموسمي.

س٢: ما هي أهمية تحليل السلسلة الزمنية؟

س٣: ما هي عناصر السلسلة الزمنية؟

س٤: كيف يتم التخلص من أثر الاتجاه العام؟

س٥: للسلسلة الزمنية التالية: ٣، ٧، ٦، ١٦، ١٢، ١٤، ١١، ١٠، ٩.

المطلوب: (١) معامل الخشونة.

(٢) سلسلة المعدلات المتحركة بطول (٣).

س٦: الجدول التالي يبين صادرات المملكة خلال السنوات (١٩٨٠-١٩٨٩).

السنة	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢	١٩٨٣	١٩٨٤	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩
صادرات المملكة بملايين الدنانير	٨١	٩٠	٩٩	٩٨	١٠١	١١٠	١٢٠	١١٩	١٢٥	١٥٠

المطلوب:

(١) رسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

(٢) إيجاد معادلة الاتجاه العام باستخدام:

(أ) طريقة التمهيد باليد.

(ب) طريقة نصف السلسلة.

(حـ) طريقة المتوسطات المتحركة (طول المتوسط يساوي ٣).

(د) طريقة المربعات الصغرى.

(٣) التنبؤ بالقيم الاتجاهية للصادرات عام ١٩٩٥، ٢٠٠٠ .

(٤) تخليص قيم الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

س٧: الجدول التالي بين مبيعات إحدى المتاجر الكبرى الربع السنوية خلال السنوات (١٩٩٥-١٩٩٨) بالآلاف الدنانير.

السنة / الفصل	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨
الشتاء	٢٧	٤٦	٥٢	٥١
الربيع	٢٨	٤٥	٤١	٥٢
الصيف	٣٩	٤١	٤٦	٥٣
الخريف	٣٧	٣٨	٥٠	٥٩

المطلوب:

(١) تقدير معادلة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى.

(٢) تخليص قيم الظاهرة من أثر الاتجاه العام.

(٣) حساب الدليل الموسمي.

(٤) تخليص الظاهرة من الأثر الموسمي.

(٥) إيجاد نسب التغيرات الدورية والعرضية.

الوحدة العاشرة

١٠

الإحصاءات الحيوية والسكانية

Demographic and vital statistics

(١٠-١) الإحصاءات الحيوية.

(١٠-١-١) إحصاءات المواليد.

(١٠-١-٢) الخصوبة.

(١٠-١-٣) إحصاءات الوفيات.

(١٠-١-٤) الإحصاءات الصحية.

(١٠-١-٥) إحصاءات التحرك السكاني.

(١٠-١-٦) إحصاءات الزواج والطلاق.

(١٠-١-٧) إحصاءات المرض.

(١٠-٢) مقاييس النمو السكاني.

تمارين الوحدة.

الإحصاءات الحيوية والسكانية

(١٠-١) الإحصاءات الحيوية:

تعريف:

يمكن تعريف الإحصاءات الحيوية بأن مجموع الحوادث والأحداث التي تصيب الإنسان منذ لحظة ولادته حتى وفاته. وبهذا التعريف فإن الإحصاءات الحيوية تشمل:

(١) إحصاءات المواليد.

(٢) إحصاءات الوفيات.

(٣) إحصاءات الزواج والطلاق.

(٤) إحصاءات المرض.

(٥) إحصاءات التحرك السكاني.

(٦) الإحصاءات الصحية.

ويتم عادة الحصول على البيانات المتعلقة بالإحصاءات الحيوية بموجب قوانين خاصة تنظمها الدولة. وسنأتي بشيء من التفصيل على هذه الإحصاءات.

(١٠-١-١) إحصاءات المواليد:

يتم الحصول على البيانات المتعلقة بالمواليد من السجل المدني الذي يفرض على المواطنين تسجيل والتبليغ عن كل ولادة جديدة ويتم عادة التفريق بين المواليد أحياء والمواليد موتى.

تعريف: المولود الحي هي كل مولود تظهر عليه بعد ولادته أية علامة من علامات الحياة بعد انفصاله عن أمه حتى ولو توفي بعد ذلك فوراً.

تعريف: المولود الميت من ولد ميتاً بعد الشهر السادس من الحمل سواء أحدثت الوفاة قبل الوضع أو أثناءه ولم يظهر على الجنين بعد الانفصال التام أية علامة من علامات الحياة.

ومن أهم إحصاءات المواليد:

(١) معدل المواليد الخام = $\dfrac{\text{عدد المواليد أحياء في السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$

وقد سمي هذا المعدل بالمعدل العام أو الخام لأنه لا يأخذ في الاعتبار اختلافات الترتيب السكاني بين المجتمعات.

(١٠-١-٢) الخصوبة:

ويقصد بالخصوبة القدرة الواقعة للمرأة على الإنجاب وتقاس الخصوبة بعدد الأطفال الذين تنجبهم الأنثى خلال فترة الإنجاب التي تتراوح بين سن ١٥–٤٥ (أو ٤٩) حسب ظروف المجتمع.

ونلاحظ بأن مقياس الخصوبة ربط بالأنثى لأن الأنثى هي التي تحمل الجنين وسن الخصوبة محددة بين سن البلوغ واليأس وبالتالي تسهل عملية القياس وهنالك عوامل مؤثرة في الخصوبة هي:

(١) الحروب والأمراض والأوبئة وتؤثر هذه على الخصوبة سلبياً وذلك لأسباب منها:

(أ) تأجيل الزيجات بسبب ظروف الحرب.

(ب) انتشار الأوبئة والأمراض.

(حـ) سوء التغذية.

(د) غلاء المعيشة.

(هـ) ارتفاع الأجور أثناء الحرب مما يغري الإناث بالعمل والامتناع عن الإنجاب مؤقتاً.

لكن يلاحظ بأن فترة ما بعد الحرب تشهد زيادة في الخصوبة بسبب اتمام الزيجات المؤجلة وكذلك يلاحظ بأن عدد الذكور المواليد أكبر من الإناث لأسباب يعلمها الله سبحانه وتعالى.

(٢) **درجة التقدم الحضاري:** عادة يصاحبها نقص في معدلات الخصوبة بسبب انتشار وسائل التسلية فكلما كان البلد متقدم حضاريا كلما نقص معدل الخصوبة فيه.

(٣) **عوامل اقتصادية واجتماعية:** تؤثر سلباً وإيجاباً على الخصوبة.

ومن أهم مقاييس الخصوبة ما يلي:

$$\text{(١) معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{\text{عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٢) معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات والمطلقات والأرامل في سن الحمل في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٣) معدل الخصوبة حسب فئات السن} = \frac{\text{عدد مواليد الأمهات في سن معينة}}{\text{عدد الإناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

مثال (١):

الجدول التالي يبين توزيع الإناث في سن الحمل حسب فئات السن وعدد المواليد أحياء حسب فئات سن الأم.

فئات السن	عدد الإناث في منتصف السنة	عدد المواليد أحياء
١٥-٢٠	٣٨٦١٥٧٨٠	٨٥٦١٠
٢٠-٢٥	١٧٨٦٥١٦٢	٢٧٩٦٨٥
٢٥-٣٠	٢٥٦٨٦٩٢١	٧٨١٧٦٥
٣٠-٣٥	٢٩٦٨٦١٩٨	٥٣٨٠٧٦
٣٥-٤٠	٢١٤٨٥٠٠٠	٤٢٦٩٧٠
٤٠-٤٥	١٦٦٢٩٤٠٠	١٦٦٣٥٠
٤٥-فأكثر	٢١٨٢٠٠٠٠	٤٩٢٧٠
المجموع	١٧١٧٨٨٠٠٠	٢٣٢٧٧٢٦

احسب ما يلي:

(١) معدل الخصوبة حسب الفئة العمرية (٢٠-٢٥)

$$= \frac{\text{عدد المواليد أحياء لأمهات في الفئة العمرية (٢٠-٢٥)}}{\text{عدد الإناث في نفس الفئة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٧٩٦٨٥}{١٧٨٦٥١٦٢} \times ١٠٠٠ = ١٥,٥٥$$ لكل ألف.

(٢) معدل الخصوبة للفئة العمرية (٤٥ فأكثر) $= \frac{٤٩٢٧٠}{٢١٨٢٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$

= ٢,٢٦ لكل ألف.

(٣) معدل الخصوبة العام $= \frac{٢٣٢٧٧٢٦}{١٧١٧٨٨٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٣,٥٥$ لكل ألف.

(٤) معدل المواليد الخام إذا علمت بأن عدد السكان في منتصف السنة يساوي (٢ مليار)

$$\therefore \text{معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٣٢٧٧٢٦}{٢٠٠٠٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١,١٦ \text{ لكل ألف.}$$

(١٠-١-٣) إحصاءات الوفيات:

هنالك عدة عوامل مؤثرة في الوفيات منها:

(١) الحروب يلاحظ بأن الحروب تسبب زيادة في الوفيات بسبب القتل وسوء التغذية.

(٢) الجنس: نسبة وفيات الذكور أعلى منها في الإناث ويرجع ذلك إلى عوامل بيولوجية لأن المولود الذكر أقل تحملاً لظروف الحياة من الإنثى.

(٣) الأمراض: تزيد من نسبة الوفيات.

(٤) القدم الصحي والحضاري يقلل من نسبة الوفيات.

ومن أهم معدلات الوفيات ما يلي:

$$(١)\ \text{معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{عدد الوفيات عدا المواليد موتى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$(٢)\ \text{معدل الوفيات الخاص} = \frac{\text{عدد الوفيات الذين لهم صفة خاصة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

ويقصد بالصفة الخاصة الجنس أو الجنسية أو اللون أو فئة السن... إلخ.

مثال (٢):

الجدول التالي يبين فئات السكان وفئات الوفيات في بلد ما.

فئة السن	الحالة الاجتماعية للسكان						الحالة الاجتماعية للمتوفين					
	لم يتزوج مطلقاً		متزوج		مطلق		لم يتزوج مطلقاً		متزوج		مطلق	
	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى
١٨-٢٥	٧٨١٧٠٠	٢٢٣٦٠٠	٩٨٧٥٠٠	١٨١٢٨٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠٠	٨٢٠٠	١٣٦٠٠	٢٧٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠
٢٥-٣٥	٤٥٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠٠	٢٧٠٠٠٠٠	١٨٠٠٠	٢٢٠٠٠	٢٢٠٠٠	١٨٠٠٠	٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٩٠٠٠	٥٠٠٠
٣٥ فأكثر	٣٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠	٥٠٠٠	٢٠٠٠	٥٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٥٠٠٠٠	١٠٠٠	٥٠٠

احسب معدلات الوفاة الخاصة بفئة السن (١٨-٢٥) والحالة الاجتماعية للمتزوجين.

الحل:

(١) معدل الوفاة الخاص بفئة السن (١٨-٢٥)

$$= \frac{٨٢٠٠ + ١٣٦٠٠ + ٢٧٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ + ٢٠٠٠ + ١٥٠٠}{٧٨١٧٠٠ + ٢٢٣٦٠٠ + ٩٨٧٥٠٠ + ١٨١٢٨٠٠ + ٨٠٠٠ + ١٢٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٧١٨٠٠}{٣٨٢٥١٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٨{,}٧٧ \text{ لكل ألف.}$$

(١) معدل الوفاة الخاص بالمتزوجين

$$= \frac{٢٧٠٠٠ + ٢٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ + ٣٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠}{٩٨٧٥٠٠ + ١٨١٢٨٠٠ + ٢٧٠٠٠٠٠ + ١٨٠٠٠٠٠ + ١٥٠٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢١٩٠٠٠}{٩١٦٨٧٠٠} \times ١٠٠٠ = ٢٣{,}٨٨ \text{ لكل ألف.}$$

(١٠-١-٤) الإحصاءات الصحية:

تعتبر معدلات الوفيات خير معبر عن المستوى الحضاري لبلد ما فكلما قلت نسب الوفيات هذه كلما كان البلد متقدم حضارياً وأهم المعدلات التي تدل على مستوى الصحة تلك المعدلات التي لها علاقة بوفيات الأطفال والأمومة وكذلك معدلات الوفيات المتعلقة بوفيات سبب معين... الخ.

أولا: معدل الوفاة حسب سبب الوفاة = $\frac{\text{عدد الوفيات الناشئة عن سبب معين}}{\text{عدد السكان التقديري في منتصف السنة}}$ ×١٠٠٠

مثال:

إذا كان عدد الوفيات بسبب مرض الكوليرا يساوي (٢٠٠٠) وعدد السكان التقديري في بلد ما يساوي (٢) مليون احسب معدل الوفاة بسبب مرض الكوليرا.

الحل:

معدل الوفاة بسبب مرض الكوليرا = $\frac{٢٠٠٠}{٢٠٠٠٠٠٠}$ × ١٠٠٠ = ١ لكل ألف.

ثانيا: المعدلات الخاصة بوفيات الأطفال والأمومة:

ومن أهم هذه المعدلات:

(١) معدل وفيات الأمومة = $\frac{\text{عدد وفيات النساء بسبب الحمل والولادة}}{\text{عدد المواليد أحياء}}$ × ١٠٠٠

(٢) معدل وفيات الأطفال الرضع= $\frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع عدا المواليد موتى}}{\text{عدد المواليد أحياء}}$ × ١٠٠٠

(٣) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة (أقل من ٢٨ يوم)

= $\frac{\text{عدد وفيات الأطفال أقل من ٢٨ يوم}}{\text{عدد المواليد أحياء}}$ × ١٠٠٠

(٤) معدل وفيات الطفولة المبكرة

$$= \frac{\text{عدد الوفيات من (٢٨ يوم إلى ١١ شهر)}}{\text{عدد المواليد أحياء - عدد الوفيات أقل من ٢٨ يوم}} \times ١٠٠٠$$

مثال: إذا كان عدد الوفيات النساء أثناء الحمل والولادة ٤٢٦٠٠ وعدد المواليد أحياء مليون طفل وعدد المواليد موتى = ٣٠٠٠ وعدد وفيات الأطفال الرضع الأقل من سنة يساوي ١٥٠٠٠ منهم ١٠٠٠ أطفال حديثي الولادة.

احسب ما يلي:

(١) معدل وفيات الأمومة = $\frac{٤٢٦٠٠}{١٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ٤٢,٦$ لكل ألف.

(٢) معدل وفيات الأطفال الرضع = $\frac{١٥٠٠٠ - ٣٠٠٠}{١٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٢$ لكل ألف.

(٣) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة = $\frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١$ لكل ألف.

(٤) معدل وفيات الطفولة المبكرة = = $\frac{١٥٠٠٠ - ١٠٠٠}{١٠٠٠٠٠٠ - ١٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٤,٠١$ لكل ألف.

(١٠-١-٥) إحصاءات التحرك السكاني:

يقصد بالتحرك السكاني هو انتقال السكان من منطقة لأخرى سواء داخل البلد أو خارجه وإذا كان داخل البلد سميت هجرة داخلية وإذا كانت خارج البلد سميت هجرة خارجية.

أسباب الهجرة:

(١) العوامل الاقتصادية وهي العوامل الغالبة على الهجرة سواء الداخلية أو الخارجية ويتم الانتقال لتحسين الأوضاع الاقتصادية.

(٢) عوامل سياسية: ويضطر هنا السكان للهجرة بسبب الاضطهاد السياسي أو عمليات الطرد.

(٣) طلباً للعلم: وتتم هنا الهجرة على المستوى الفردي.

(٤) التقدم الحضاري: ويتم هنا الانتقال من بلاد أقل حضارة إلى بلاد أكثر تقدم حضاري.

(٥) الكثافة السكانية: وتتم هنا الهجرة العكسية كالهجرة من المدينة إلى الريف أو الهجرة من بلاد أكثر ازدحاماً إلى بلاد أقل ازدحام.

(١٠-١-٦) إحصاءات الزواج والطلاق:

تستخدم البيانات الخاصة بالزواج والطلاق لاستخراج معدلات أهمها:

$$\text{(١) معدل الزواج الخام} = \frac{\text{عدد حالات الزواج خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٢) معدل الزواج} = \frac{\text{عدد حالات الزواج خلال السنة}}{\text{عدد السكان من هم في سن الزواج في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٣) معدل الطلاق الخام} = \frac{\text{عدد حالات الطلاق خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٤) معدل الطلاق} = \frac{\text{عدد حالات الطلاق خلال السنة}}{\text{عدد المتزوجين في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

(١٠-١-٧) إحصاءات المرض:

من الإحصاءات التي تهم العاملين في المجال الصحي وتحليل الوضع الصحي في المجتمع هو موضوع إحصاءات المرض وفما يلي بعض المعدلات الخاصة بالإحصاءات المرضية:

$$\text{(١) معدل الإصابة} = \frac{\text{عدد الإصابات الجديدة في مرض معين خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٢) معدل الانتشار} = \frac{\text{عدد الإصابات الموجودة في لحظة معينة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{(٣) نسبة حالات الهلاك} = \frac{\text{عدد حالات الوفاة بسبب مرض معين}}{\text{عدد حالات الإصابة بهذا المرض}} \times ١٠٠٠$$

مثال (٣):

مجتمع مكون من ١٠٠٠٠ شخص ونتيجة دراسة وجود مرض معين في بداية العام وجد أنه لا توجد بينهم أي إصابات ولكن تم تسجيل ٢٠٠ حالة إصابة خلال الشتاء أو معدل الإصابة بهذا المرض.

الحل:

$$\text{معدل الإصابة} = \frac{\text{عدد حالات الإصابات الجديدة خلال السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٢٠٠}{١٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ٢٠ \text{ لكل ألف.}$$

(١٠-٢) تعداد السكان:

هو عملية حصر الإفراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع بيانات محددة تبين الصفات الأساسية للأفراد الذي تتألف منهم مجتمع معين ومن أهم البيانات التي يتم جمعها في التعداد ما يلي:

(١) بيانات عن خصائص الأفراد مثل العمر، الجنس، الديانة، الجنسية، الميلاد، الوضع الاجتماعي، الحالة التعليمية، المهنة.

(٢) بيانات تكوين الأسرة مثل عدد الأفراد وعلاقة أفراد الأسرة بالمسكن وحالة المسكن.

(٣) بيانات عن الخصوبة.

أهداف التعداد السكاني:

(١) توفر بيانات التي تفيد في حل المشاكل السكانية وبذلك يتم من خلالها تقدير احتياجات البلد من خدمات صحية وتعليمية وإسكانية.

(٢) توفير خامات لدراسات أكثر تعمقاً.

(٣) تساهم في التنمية الاقتصادية للبلد من خلال معرفة التوزيع السكاني.

(١٠-٣) مقاييس النمو السكاني:

(١) الزيادة الطبيعية للسكان وهي الفرق بين عدد المواليد وعدد الوفيات وبالتالي فإن معدل الزيادة السكانية

$$= \frac{\text{عدد المواليد أحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

(٢) صافي الهجرة = عدد المهاجرين إلى البلد – عدد المهاجرين من البلد.

$$\text{معدل الهجرة} = \frac{\text{صافي الهجرة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

(٣) التغير في عدد السكان (الزيادة السكانية) = الزيادة الطبيعية + صافي الهجرة

$$\text{معدل النمو السكاني (معدل الزيادة السكانية)} = \frac{\text{الزيادة السكانية}}{\text{عدد السكان في منتصف العام}} \times ١٠٠٠$$

مثال (٤):

إذا كان عدد سكان قطر ما في منتصف عام ١٩٩٤ يساوي (٩) مليون وعدد المواليد أحياء (٥٦) ألف وعدد الوفيات تساوي (٧) آلاف وعدد المهاجرين إلى البلد يساوي (٣٦٠) ألف وعدد المهاجرين منه يساوي (٢٤٠).

المطلوب: (١) معدل الزيادة الطبيعية.

(٢) معدل الهجرة.

(٣) معدل النمو السكاني.

الحل:

(١) الزيادة الطبيعية = عدد المواليد أحياء – عدد الوفيات

= ٥٦٠٠٠– ٧٠٠٠ = ٤٩٠٠٠

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{٤٩٠٠٠}{٩٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ٥,٤٤ \text{ لكل ألف.}$$

$$\text{(٢) معدل الهجرة} = \frac{\text{عدد المهاجرين إليه – عدد المهاجرين منه}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٣٦٠٠٠٠ - ٢٤٠٠٠٠}{٩٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{١٢٠٠٠٠}{٩٠٠٠٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٣,٣٣ \text{ لكل ألف.}$$

(٣) معدل النمو السكاني = معدل الزيادة الطبيعية + معدل الهجرة.

= ٥,٤٤ + ١٣,٣٣

= ١٨,٧٧ لكل ألف.

معدل النمو السكاني:

هنالك عدة طرق لحساب معدل النمو السكاني منها:

(١) نظام المتوالية العددية

(٢) نظام المتوالية الهندسية.

وسنقوم بشرح نظام المتوالية العددية.

نظام المتوالية العددية:

لنفترض بأن عدد السكان يتغير (يتزايد أو يتناقص) بمقدار عددي ثابت من سنة لأخرى خلال الفترة الزمنية الفاصلة بين تعدادين وبذلك يتم حساب معدل النمو حسب نظام المتوالية العددية كالتالي:

$$ر = \frac{ك_{١} - ك}{ك \times ت}$$

حيث ر: معدل النمو السكاني السنوي.

ك: عدد السكان في التعداد الأول.

$ك_{١}$: عدد السكان في التعداد التالي.

ن: طول الفترة الزمنية الفاصلة بين التعدادين.

مثال(٥):

إذا كان سكان الأردن عام ١٩٩٤ يساوي (٤) مليون وأصبح عدد سكانه عام (٢٠٠٠) يساوي (٥) استخرج معدل النمو السكاني في الأردن.

الحل:

$$\text{معدل النمو السكاني} = ر = \frac{ك_{١} - ك}{ك \times ت}$$

حيث $ك_{١}$= ٥ مليون.

ك = ٤ مليون.

ت = ٦ مليون.

$$\therefore \text{ر} = \frac{٥-٤}{٤\times٦} = \frac{١}{٢٤} = ٠,٠٤١$$

مثال (٦):

إذا كان معدل النمو السكاني للأردن يساوي (٢,٥) بالمائة وأن عددهم عام ١٩٩٠ يساوي ٣,٦ مليون أوجد.

(١) عدد السكان التقديري عام ١٩٩٧.

(٢) عدد السكان التقديري عام ٢٠٠٢.

الحل:

حسب معادلة النمو السكاني فإن:

$$\text{ر} = \frac{\text{ك}_١-\text{ك}}{\text{ك}\times\text{ت}}$$

$\Leftarrow \text{ك}_١ = \text{ك} + \text{ر} \times \text{ك} \times \text{ت}$

عدد السكان التقديري في أي عام = ك × [١ + ر × ت]

(١) عام ١٩٩٧ وتكون الفترة الزمنية الفاصلة ت = ٧، ك = ٣,٦ ، ر = ٠,٠٢٥.

وبالتالي فإن:

عدد السكان التقديري عام ١٩٩٧ = $\text{ك}_١$ = ٣,٦ × [١+ ٠,٠٢٥ × ٧]

= ٤,٢٣ مليون

(٢) الفترة الزمنية الفاصلة بين (١٩٩٠، ٢٠٠٢) تساوي ت = ١٢.

∴عدد السكان التقديري = ٣,٦ × [١+ ٠,٠٢٥ × ١٢]

= ٤,٦٨ مليون.

ونلاحظ بأن هنالك عدة عوامل تؤثر في الزيادة الطبيعية منها:

(١) التقدم الحضاري يصاحبه تقدم صحي وبالتالي يقلل من عدد الوفيات وكذلك تطوير وسائل منع الحمل يقلل من عدد المواليد وهذا يعني بأن التقدم الحضاري يؤثر سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية.

(٢) الموقع الجغرافي: يؤثر الموقع الجغرافي سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية حيث أنه في البلاد الحارة يكون سن البلوغ مبكراً في الباردة يتأخر سن البلوغ.

(٣) الحروب تقلل من عدد المواليد وتزيد عدد الوفيات.

(٤) الفئات العمرية حيث في البلاد الفتية يكون عدد الوفيات قليل يعكس المجتمعات المتقدمة في السن.

(٥) العوامل الاجتماعية والاقتصادية: هنالك معتقدات وعادات في المجتمع تؤثر سلباً وإيجاباً على الزيادة الطبيعية وكذلك الوضع الاقتصادي.

تمارين الوحدة العاشرة

س١: عرف المفاهيم التالية:

الإحصاء الحيوي، تعداد السكان، الخصوبة، التحرك السكاني، المولود حي، المولود ميت.

س٢: وضح كيف تؤثر كل مما يلي على الوفيات:

(١) العوامل البيولوجية.

(٢) التخلف الصحي.

(٣) التقدم الحضاري.

(٤) فئة السن.

س٣: إذا كان عدد المواليد أحياء (٢٥٠) ألف وعدد السكان في منتصف العام يساوي (٣) مليون احسب معدل المواليد العام.

س٤: إذا كان:

عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة يساوي (٤٢٨٥٠).

عدد السكان في منتصف العام يساوي (٩) مليون.

عدد المواليد أحياء (٢٥٠) ألف.

عدد حالات الزواج (٣٧٠) ألف.

عدد حالات الطلاق (٤٥) ألف.

عدد المواليد موتى (١١٥٠٠).

عدد الوفيات للأطفال الرضع الأقل من سنة (٦٠٠٠) منهم ٣٥٠ حديثي الولادة.

المطلوب:

(١) معدل وفيات الأمومة.

(٢) معدل الزواج الخام.

(٣) معدل الطلاق الخام.

(٤) معدل وفيات الأطفال الرضع.

(٥) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة.

س٥: الجدول التالي يبين إحصائية بأعداد النساء وأعداد المواليد أحياء مصنفة حسب أعمار النساء.

الفئة العمرية للنساء	عدد النساء	عدد المواليد أحياء
١٥–٢٠	٣٣٥٢٠٠	٢٣٨١٥
٢٠–٢٥	٣٨٩٦٠٠	٥٣٨٧٠
٢٥–٣٠	٢٨٣٤٠٠	٢١٦٧٠
٣٠–٣٥	٨٤٣٣٠٠	٩٨٣٥
٣٥–٤٥	٢١٨٠٥٠	٥٨٧٠
٤٥– فأكثر	٢٥٨٧٦٠	٢١٨٠

المطلوب: (١) معدل الخصوبة حسب الفئة العمرية.

(٢) معدل الخصومة العام.

س٦: الجدول التالي يبين عدد السكان حسب الجنس والجنسية والمتوفين في قطر ما.

الجنس / الجنسية	عدد السكان بالملايين		عدد المتوفين بالآلاف	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث
أردني	٢,٣	٢,٤	٢٣	٢٢
مصري	٤٦	٤٧	٩٦٧	٨٨٦
سوري	١١,٣	١١,٤	٢٥٣	٢٤٨
جنسيات أخرى	٢٥٨,٧	٢٥٩	١٨٥٠	١٨٢٥

احسب جميع معدلات الوفلة الخاصة الممكن حسابها.

س٧: إذا كان عدد حالات الإصابات الجديدة بمرض الإيدز في الولايات المتحدة

تساوي (١,٧) مليـون وعـدد سـكان الولايـات المتحـدة تسـاوي (٢٨٩) مليـون احسب معدل الإصابة بمرض الإيدز ثم احسب معدل أو نسبة حـالات الهـلاك بسبب الإيدز إذا علمت بأن عدد الوفيات بسبب هـذا المـرض تسـاوي (٧٦) ألف.

س٨: إذا كان عدد سكان الولايات المتحدة الأمريكية عام ١٩٩٩ يساوي (٢٨٩) مليـون نسمة وأصبح عدد سكانها عام (٢٠٠١) يسـاوي (٢٩٥) مليـون احسـب معـدل النمو السكاني للولايات المتحدة.

س٩: إذا كان عدد سكان قطر ما عام ١٩٨٠ يساوي (١٣٠) مليون وكـان معـدل النمـو السكاني لهذا القطر يساوي (٠,٠٣).

المطلوب:

(١) عدد السكان التقديري لهذا القطر عام ١٩٩٠.

(٢) عدد السكان التقديري لهذا القطر عام ٢٠٠٠.

أسئلة عامة

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١) العينة هي:

أ- المشاهدات المقاسة على أفراد المجتمع الإحصائي.

ب- مقاييس إحصائية غير متصلة.

جـ- مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي

د- سبب من أسباب المسح الشامل

٢) عدد الأطباء المسجلين في النقابة (٢٥٠٠٠) طبيب و (١٥٠٠٠) طبيبة أردت اختيار عينة عددها (٤٠٠) طبيب وطبيبة فالطريقة الأنسب لاختيار هذه العينة على أساس نقابي هي العينة:

أ- العشوائية ب- المنتظمة

جـ-العنقودية د- الطبقية

٣) أن البديل المناسب لطريقة العينة الطبقية عندما لا تتوافر قائمة بعناصر المجتمع الإحصائي هي العينة:

أ- الغرضية ب- العنقودية

جـ-العشوائية البسيطة د- لا شيء مما ذكر

٤) نوع المتغير "عدد الأطفال في أسرة" هو:

أ- متصل فئوي ب- متصل ترتيبي

جـ- منفصل نسبي د- منفصل أسمى

٥) مستوى القياس الذي تعطي فيه الأرقام لأغراض التمييز فقط هو المستوى:

أ- الأسمي ب- الترتيبي جـ- الفئوي د- النسبي

٦) إذا أنشأ توزيعاً تكرارياً فإن .... التكرارات يجب أن يساوي ....

أ- مجموع، طول الفئة ب- عدد ، المدى

جـ- مجموع، عدد البيانات (ن) د- مجموع ، عدد الفئات

٧) يمكننا الحكم على مدى تمثيل عينة ما للمجتمع المأخوذة فيه من خلال:

أ- تجانس أفراد عينة الدراسة.

ب- تمثيل العينة بنسبة تزيد عن ١٠٪.

جـ- بعد أو قرب العينة عن متوسط مجتمعها مقدراً بوحدات الانحراف المعياري.

د- العينة المنتظمة .

٨) عند اختيار عينة الدراسة يؤخذ بعين الاعتبار:

أ- انتقاء أفراد عينة الدراسة بدقة وعناية.

ب- مبدأ تكافؤ الفرص جميع أفراد العينة.

جـ- اختيار الأفراد المناسبين.

د- إسقاط بعض أفراد العينة.

٩) أفضل نسبة في اختيار عينة الدراسة من مجتمع كبير كما اجمع عليه الإحصائيون هي:

أ- ٢٪ ب- ٤٪ جـ- ٥٪ د- ١٠٪

١٠) يشترط في حالة اللجوء إلى الاختيار العشوائي للعينة أن يكون مجتمعها:

أ- طبقياً ب- محدّداً جـ- كبيراً د- متجانساً

١١) عُرضت أعداد الطلبة في الصفوف الثانوية التجاري والصناعي في مدرسة ثانوية بطريقة الدائرة. إذا كان عدد طلاب المدرسة يساوي (٦٠٠) طالب وعدد طلاب الصف الأول الصناعي يساوي (٥٠) طالب فإن قياس زاوية قطاع هذا الصف يساوي:

أ- ١٢٠° ب- ١٢° جـ- ٣٠° د- ٦٠°

١٢) العلاقة بين تكرار أي فئة (ت) ونسبة عدد الأفراد (ك) في تلك الفئة هي:

أ- ك = $\frac{ت}{ن}$ ب- ن = ك × ت

جـ- ت = ن × ك د- غير ذلك

١٣) التوزيع التكراري الذي فيه تكرارات النقاط المتساوية البعد عن الفئة المركزية متساوية يمكن أن يكون:

أ- مستطيلاً ب- له قمتين جـ- يشبه شكل الجرس د- أي واحدة ما ذكر

١٤) الخواص التي نميز بها شكل التوزيع:

أ- التماثل أو عدمه   ب- عدد القمم

جـ- التفرطح   د- جميع ما ذكر

١٥) تمثل التكرارات في المدرج التكراري للتوزيع التكراري ذي الفئات المتساوية (وغير المتساوية).

أ- مساحات المستطيلات   ب- ارتفاعات المستطيلات

جـ- عروض المستطيلات   د- لا شيء ما ذكر

١٦) يضف الموظف المختص الوفيات في مستشفى في توزيع تكراري فئاته بالسنوات ٠-١٠ ، ١١-٢٠ ، ٢١-٣٠ ، ٣١-٤٠ ، ٤١-٥٠، ٥١-٦٠، ٦١-٧٠

أ- الفئات أعلاه تصلح لعرض الوفيات في جدول تكراري.

ب- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها متداخلة.

جـ- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها الفئة الأولى أطول من غيرها.

د- الفئات أعلاه لا تصلح لتكوين جدول تكراري لأنها غير كافية حيث أنها لا تستوعب الوفيات من عمر أكبر من ٧٠ سنة.

١٧) يبنى وصف التوزيع التكراري على ثلاث صفات هي:

أ- الحجم، الشكل، النزعة المركزية.

ب- الحجم، النزعة المركزية، التشتت.

جـ- الشكل، النزعة المركزية، التشتت.

د- الحجم، الشكل، عدد البيانات.

١٨) أن عملية تصنيف البيانات يجب أن يعتمد على نظام يتم بموجبه تصنيف البيانات وحتى يكون النظام المعتمد في عملية التصنيف نظام ناجح يجب أن يتمتع بخواص.

أ- عدم التداخل والشمول.

ب- الاستمرارية في تطبيق النظام المستخدم.

جـ- مجموع التكرارات يجب أن يساوي عدد البيانات

د- أ + جـ

١٩) التوزيع التكراري المتناسب للبيانات (٦، ٨ ، ٩، ١٠، ٨، ٨ ، ٩، ١٠، ١٠، ١٠)

أ

س	ت
٦	١
٨	٣
٩	٢
١٠	٤

ب

س	ت
٦	١
٧	٠
٨	٣
٩	٢
١٠	٤

ج

س	ت
٠	٧
١	٦
٢	٩
٣	٨
٤	١٠

د- لا شيء مما ذكر

٢٠) أخذت الفئة (٣٠-٣٧) من جدول تكراري فإن طول هذه الفئة يساوي:

أ- ٧ ب- ٦ جـ- ٨ د- ٣,٥

اعتمد على الجدول التالي في الإجابة عن الأسئلة التي تليه (٢١-٢٥).

الفئات	ت	≥ حد فعلي	تكرار تراكمي صاعد
٣٠-٤٧	٢٧	٤٧,٥	٢٧
٤٨-٦٥	س	٦٥,٥	
٦٦-٨٣	٢٠	ص	
٨٤-١٠١	٧	١٠١,٥	٨٠
المجموع			

٢١) التكرار النسبي للفئة (٦٦-٨٣) يساوي:

أ- ٠,٥ ب- ٠,٢ جـ- ٠,٢٥ د- غير ذلك.

٢٢) قيمة س تساوي

أ- ٢٠ ب- ٢٦ جـ- ٢٧ د- لا يمكن إيجادها

٢٣) قيمة ص تساوي

أ- ٦٥,٥ ب- ٨٣,٥ جـ- ٨٤,٥ د- ٨٣

٢٤) التكرار التراكمي المقابل للحد الفعلي ٨٣,٥ يساوي

أ- ٢٠ ب- ٤٧ جـ- ٨٠ د- ٧٣

٢٥) النسبة المئوية للتكرارات التي تقل عن أو تساوي ٦٥ هي:

أ- ٦٦,٢٥٪ ب- ٣٣,٧٥٪ جـ- ٩١,٢٥٪ د- ٧,٧٥٪

٢٦) إذا كان لدينا فئة مركزها (٢٦) وطول هذه الفئة يساوي (٩) فإن الحدود الفعلية لهذه الفئة هي:

أ) ٢١,٥، ٣٠ ب) ٢١,٥، ٣٠,٥ حـ) ٢٢، ٣٠ د) ١٧، ٣٥

٢٧) إذا كان لدينا ثلاثة مصانع هي أ، ب، حـ وكان الحجم الكلي للإنتاج يساوي (١٢٠٠٠) وحدة ومّثل الإنتاج بطريقة الدائرة فكانت زاوية قطاع المصنع حـ تساوي (٧٢°) فإن حجم إنتاج المصنع يساوي:

أ) ٢٠٠٠ ب) ٢٤٠٠ حـ) ٩٦٠٠ د) لا يمكن إيجاده بالمعلومات المتوافرة

٢٨) أي مقياس مما يأتي ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

أ) المدى. ب) المنوال. حـ) الوسيط. د) المئين السبعون.

٢٩) المقياس الذي يقسم المساحة تحت المدرج التكراري لتوزيع ملتو إلى قسمين متساويين هو:

أ) المنوال. ب) الوسط الحسابي. حـ) الوسيط. د) الانحراف المعياري.

٣٠) مقياس النزعة المركزية الذي يعتمد فقط على عدد البيانات التي قيمها أقل من قيمته وعدد البيانات التي قيمتها أكبر من قيمته هو:

أ) الوسط الحسابي. ب) الوسيط. حـ) المنوال. د) المدى.

٣١) يجب أن يكون الوسط الحسابي:

أ) إحدى قيم البيانات المعّطاة.

ب) نقطة على محور القيم ولكن ليس من الضروري أن يساوي قيمة من قيم البيانات المعّطاة.

حـ) مسافة على محور القيم توجد بين قيمتين من قيم البيانات المعّطاة.

د) مسافة على محور القيم ولكن ليس من الضروري أن تكون بين قيمتين من القيم المعّطاة.

٣٢) لمجموعة من البيانات كان $\sum_{ر=١}^{٢٠} س_ر = ٣٠٠$ فإن قيمة $\sum_{ر=١}^{٢٠} (س_ر - ١٥)$

أ) ١٥ ب) صفر حـ) ٤٥ د) ٢٢٥

٣٣) إذا كان $\sum_{ر=١}^{٦} س_ر = ٦٠$، $\sum_{ر=١}^{٩} ص_ر = ٤٥$ دمجت مجموعة البيانات $س_ر$ مع مجموعة البيانات

صر فأصبح الوسط الحسابي:

أ) ٧,٥ ب) ٧ حـ) ١٥ د) ١٠٥

٣٤) أكثر مقاييس النزعة المركزية استعمالا هو:

أ) الوسيط ب) المنوال حـ) المئينات د) الوسط الحسابي

٣٥) إذا كانت انحرافات (٥) قيم عن وسطها الحسابي هـو أ ، ٢ -أ ، ٣ ، ٦ -٣أ ، ٩ فـإن قيمة أ تساوي:

أ) صفر ب) ٦ حـ) $\frac{١٤}{٣}$ د) $-\frac{١٤}{٣}$

٣٦) لحساب الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالب في مبحث ما اختير العدد (٥٢)كوسط فرضي فإذا علمت بأن مجموع انحرافات علامات هؤلاء الطلبة عن الوسط الفرضي يساوي (٣٠٠) فإن الوسط الحسابي يساوي:

أ) ٤٢ ب) ٥٥ حـ) ٥٢ د) ٦٢

٣٧) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٤٠) طالب هو (١٥) والوسط الحسابي لعلامات (٢٠) طالبه هو (٤٥) فإن الوسط الحسابي المرجح يساوي:

أ) ٢٠ ب) ٢٥ حـ) ٢٢,٥ د) ٣٠

٣٨) إذا كان المئين الستون يساوي (١٢٠) فإن المئين الثلاثون يساوي:

أ) ٣٠ ب) ٦٠ حـ) ٣٦ د) لا يمكن تحديده

٣٩) مجموعة من الأرقام مكونة من اربع اربعات وخمس خمسات وست ستات وسبع سبعات فإن المنوال يساوي:

أ) ٤ ب) ٥ حـ) ٦ د) ٧

٤٠) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات(٣٠) طالبا في مادة الإحصاء يساوي (٦٠) وعدلت هذه العلامات وفق المعادلة التالية : ص = ٨٠ - $\frac{١}{٤}$س ، حيث س: العلامة قبل التعديل، ص: العلامة بعد التعديل فإن الوسط الحسابي بعد التعديل يساوي:

أ) -١٥ ب) ١٥ حـ) ٦٥ د) ٧٢,٥

استعمل البيانات (٥، ٧، ٧، ٨، ٨، ٨، ٨، ١٠، ١٣) لإجابة عن الأسئلة من (٤١-٤٣)

٤١) تغيرت علامتان من القيمة ٨ واحدة إلى ٧ والثانية إلى ٩ فتغير الوسيط:

أ) من ٨ إلى ٧ حـ) من ٨,٥ إلى ٨

ب) من ٩ إلى ٧ د) من ٨ إلى ٧,٥

٤٢) تغيرت القيمة ٥ فأصبحت ٨ فتغير الوسط الحسابي (مقربا لأقرب منزلة عشرية)

أ) من ٨ إلى ٨,٢ ب)من ٨,٢ إلى ٨,٥ حـ) من ٨ إلى ٨,٣ د) من ٨,٣ إلى ٨,٤

٤٣) تغيرت القيمة ١٠ إلى ٨ فتغير المنوال:

أ) من ٨ إلى ٧ ب) ٨إلى ١٣ حـ) من ١٠ إلى ١٣ د) لم يتغير المنوال

٤٤) إذا كان $\overline{س}$ =٤٠ فإن $\sum_{ر=١}^{٢٠} س_ر$ يساوي:

أ) ٢ ب) ٨٠٠ حـ) ٤٠٠ د)لا يمكن إيجاده بالمعلومات المتوفرة

٤٥) إذا كان $\dfrac{\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر \times ت_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر} = ٤٠$ ، $\overline{س} = ٦٢$

حيث $ح_ر$ هي انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي فإن الوسط الفرضي يساوي:

أ) ١٠٢ ب) -٢٢ حـ) ٢٢ د) لا يمكن إيجاده بالمعلومات المتوفرة

٤٦) إذا علمت بأن ص = ٣ س +١٠ ، $\overline{ص}$= 70 فإن قيمة $\overline{س}$ تساوي:

أ) ٢٢٠ ب) ٦٠ حـ) ٢٠ د) $\frac{٧٠}{٣}$

٤٧) إذا كان $\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر+ص_ر)$=٤٠٠ وكان $\overline{س}$=١٥ فإن قيمة $\overline{ص}$ تساوي:

أ) ٢٥ ب) ٤٠ حـ) ٢٠ د) ١٠

٤٨) للبيانات ٥، ٣، ٧، ١١، فإن $\sum س_ر^٢$ بينما $(\sum س_ر)^٢$ يساوي:

أ) ٣٦ ؛ ٦٧٦ ب) ٦٧٦ ؛ ٢٠٤ حـ) ٢٠٤ ؛ ٦٧٦ د) ٠ ؛ ٢٠٤

*** إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي ٨٠ والانحراف المعياري يساوي ٨ ونصف المدى الربيعي يساوي (١٠) والمئين $_{٢٥}$ يساوي ٣٠ فاعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة من (٤٩-٥٠).

٤٩) قيمة المئين ٧٥ يساوي:

أ) ١٠ ب) ٤٠ حـ) ٥٠ د) -١٠

٥٠) إذا عدّلت القيم وفق المعادلة ص=١,٥ س − ٣٠ فإن قيمة الانحراف المعياري للقيم بعد التعديل يساوي:

أ) ١٢ ب) −١٨ حـ) ١٨ د) ٨

٥١) الانحراف المعياري للمشاهدات (١،٢،٣) يساوي

أ) $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ حـ) $\sqrt{٢}$ د) ٢

٥٢) واحدة من الآتية ليس مقياسا للتشتت.

أ) المدى. ب) الانحراف المتوسط. حـ) المدى المئيني. د) الوسيط.

٥٣) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من المشاهدات يساوي (٣) وعدّلت هذه المشاهدات وفق المعادلة التالية:ص = ٢ س+٨ حيث ص المشاهدة بعد التعديل، س المشاهدة قبل التعديل فإن التباين بعد التعديل يساوي .

أ) ٦ ب) ٩ حـ) ١٤ د) ٣٦

٥٤) إذا كان التباين ($\sigma^٢$) لتوزيع تكراري يساوي (٩) وكان $\sum_{ر=١}^{٢٠}$ سر × تر = ٤٠٠ فإن

$\sum_{ر=١}^{٢٠}$ س$^٢_ر$ × تر يساوي:

أ) ٣٦٠٠ ب) ٤٠٠٠ حـ) ٨٢٠٠ د) ٨١٨٠

٥٥) الانحراف المتوسط للمشاهدات (٣،٥،٩،٧) هو:

أ) ٥ ب) $\sqrt{٥}$ حـ) ٢ د) $\sqrt{٢}$

٥٦) إذا كان الوسيط لتوزيع أحادي المنوال يساوي (٢٠) والوسط يساوي (٢٩) فإن المنوال يساوي:

أ) ٢٠ ب) ٢ حـ) ٢٦ د) −٢

٥٧) التباين للمشاهدات (٣، ٣، ٣، ٣، ......، ٣) يساوي:

أ) ٣ ب) ٩ حـ) صفر د) $\sqrt{٣}$

٥٨) إذا كان العزم الرابع حول الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات يساوي (٢٤) والانحراف المعياري يساوي (٣) فإن معامل التفرطح العزومي يساوي:

أ) ٢,٦٧ ب) ٠,٢٩٦ حـ) ٧,١١ د) ٠,٨٨٨

٥٩) إذا كان العزم الثالث حول الوسط الحسابي لجدول تكراري يساوي (-٣٦) والعزم الثاني يساوي (٩,٢) فإن معامل الالتواء العزومي يساوي:
أ) -٣,٩١ ب) ١,٢٩ حـ) -١,٢٩ د) -٠,٠٤٦
٦٠) العزم الأول للمشاهدات 6 ,3 ,8 ,9 ,5 ,7 ,4 حول الصفر يساوي:
أ) صفر ب) ٦ حـ) ٤٠ د) ٢٨٨
*** تقدّم (١٠٠٠) طالب لامتحان عام وكان الوسط الحسابي للامتحان (٦٠)والانحراف المعياري (٦) فإذا كانت علامة النجاح (٥٧) وكانت علامات الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي.
اعتمد على هذه البيانات في الإجابة عن الأسئلة (٦١-٦٢)
٦١) النسبة المئوية للنجاح في الامتحان تساوي:
أ)١٩,١٥٪ ب) ٣٠,٨٥٪ حـ) ٨٠,٨٥٪ د) ٦٩,١٥٪
٦٢) عدد الطلاب الذين تنحصر علاماتهم بين ٥١، ٧٢ يساوي:
أ) ٩١٠ ب) ٩١١ حـ) ٩٧٧ د) ٩٠
٦٣) تقدم (١٠٠٠) طالب لفحص عام وكان الوسط الحسابي لعلامتهم (٥٠) والانحراف المعياري (٨) فإذا كان توزيع علاماتهم يتبع التوزيع الطبيعي وكانت علامة النجاح في الفحص تساوي (٥٨) فإن العدد التقريبي للطلبة الراسبين يساوي:
أ) ٥١٠ ب) ٨٤١ حـ) ٧٢٠ د) ٢٨٠
٦٤) إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع ما (١٠٠)والانحراف المعياري له ١٠ فإن العلامة المعيارية التي تقابل ٩٠ هي:
أ) ١٠ ب) -١٠ حـ) ١ د) -١
٦٥) إذا كانت المساحة تحت المنحنى الطبيعي والواقعة على يسار العلامة المعيارية ى= -٢ هي ٠,٠٢٢٨ وكان توزيع المتغير س يتبع التوزيع الطبيعي فإن نسبة الحالات التي تقع بين الوسط الحسابي للمتغير س والعلاقة المعيارية ى= ٢ هي:
أ) ٠,٠٢٢٨ ب) ٠,٩٧٧٢ حـ) ٠,٤٧٧٢ د) ٠,٠٤٥٦
٦٦) تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان عام فكان الوسط الحسابي لعلامتهم (٥٨) والانحراف المعياري يساوي (٨) وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن قيمة المئين$_{٢٥}$ تساوي:
أ) ٢٥ ب) ٥٨ حـ) ٦٠ د) ٦٣,٣٦

٦٧) تقدم(١٠٠) طالب لامتحان عام فكان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٠) والانحراف المعياري (١٠) وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن الرتبة المئينية للعلامة (٤٥) تساوي:

أ) ٤٣,٣٢٪ ب) ٦,٦٨٪ حـ) ٩٣,٣٢٪ د) ٥٦,٦٨٪

٦٨) إذا كان ى متغير عشوائيا طبيعيا معياريا بحيث أن المساحة بين العددين –ى، ى تساوي ٠,٣٨٣٠ فإن قيمة ى تساوي:

أ) ١ ب) ٠,٥ حـ) –٠,٥ د) –١

٦٩) إذا كان ص متغيرا عشوائيا طبيعيا معيارياً بحيث المساحة فوق ص تساوي (٠,٩٣٣٢) فإن قيمة ص تساوي:

أ) ١,٥ ب) –١,٥ حـ) ١ د) –١

٧٠) إذا كانت العلامة المعيارية لطالب في صف ما هي (٠,٥) وعدّل المعلم العلامات الخام حسب المعادلة ص= ٨٠ – $\frac{١}{٤}$ س، حيث س العلامة قبل التعديل، ص العلامة بعد التعديل فإن العلامة المعيارية لذلك الطالب بعد التعديل تساوي:

أ) ٠,٥ ب) –٠,٥ حـ) ٠,١٢٥ د) –٠,١٢٥

٧١) تقدم (٥٠٠) طالب لامتحان ما كان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٥) والانحراف المعياري (٩) وكان توزيع علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي فإن العلامة المعيارية التي تقابل الوسيط هي:

أ) –١ ب) صفر حـ) ١ د) ٠,٥

٧٢) إذا كان المنوال لتوزيع طبيعي (٧٥) والانحراف المعياري لهذا التوزيع (١٢) فإن الوسط الحسابي يساوي:

أ) ١٦ ب) $\frac{١٦}{٧٠}$ حـ) $\frac{٧٠}{١٦}$ د) ٧٥

٧٣) إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي هو ق(س)= $\frac{١}{٣\sqrt{٢\pi}}$ هـ$^{-\frac{١}{١٨}(س-١٠)^{٢}}$

فإن الوسط الحسابي لهذا التوزيع يساوي:

أ)٢ ب)٣ حـ) ١٠ د) ١٨

٧٤) الأعداد ٢ ،٠، ٣، ٥- لا تمثل علامات معيارية لعينة حجمها ٤ وذلك بسبب:
أ) وسطها الحسابي لا يساوي الصفر. حـ) تباينها لا يساوي ١.
ب) ليست جميعها سالبة. د) ليست جميعها موجبة.

٧٥) في التوزيع الطبيعي المعياري يكون.
(أ) الوسط الحسابي($\bar{س}$) والانحراف المعياري (١). حـ) الوسط الحسابي (صفر) والانحراف المعياري(١).
(ب) الوسط الحسابي (صفر) والانحراف المعياري (σ). د) الوسط الحسابي (١) والانحراف المعياري (صفر) .

٧٦) ما علامة طالب تنحرف علامته بمقدار (٣) انحرافات معيارية دون الوسط الحسابي الذي قيمته (٣٠) وعدد الطلاب (٢٠) والانحراف المعياري (٤)
أ) ٤٢ ب) ٣٤ حـ) ١٨ د) ٣٠

٧٧) إذا كانت س لها القيمة المعيارية ز= -٠,٥ فهذا يكافئ
أ) س - $\bar{س}$ = -٠,٥ حـ) س - صفر = -٠,٥
ب) س- $\bar{س}$ = -٠,٥ σ د) س - ٠,٥ = ز

٧٨) القيم المعيارية تمثل قيماً:
أ) بدلالة الوحدات الأصلية مثل المتر، كغم الخ حـ) بدون وحدات.
ب) بدلالة الانحرافات عن القيم الأصلية. د) بدلالة الانحراف المعياري .

٧٩) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل معامل ارتباط عكسي بين متغيرين .
أ) ٠,٣ ب) -١,٢ حـ) ٠,٩ د) -٠,٦

٨٠) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) يساوي $\frac{١}{٢}$ وعرف المتغيرين
س* = ٢ س + ٥، ص* = - $\frac{١}{٥}$ ص - ٦ فإن معامل الارتباط بين المتغيرين
(س*، ص*) يساوي:
أ) $\frac{١}{٢}$ ب) - $\frac{١}{٢}$ حـ) $\frac{٢}{٥}$ د) - $\frac{٢}{٥}$

٨١) إذا كان كل قيمة من قيم $س_ر$ تساوي (٤) وكل قيمة من قيم $ص_ر$ تساوي (٨) حيث ر=١،٢،...،٢٠ فإن معامل الارتباط بين الرتب للمتغيرين (س، ص) يساوي:
أ) -١ ب) ١ حـ) صفر د) غير ذلك

٨٢) لحساب معامل الارتباط بين أطوال وأوزان(١٠) أشخاص وجد أن $\sum_{ر=1}^{10}$ ف$_ر$ = ٢٠،

$\sum_{ر=1}$ ف$_ر^2$ =٤٠ حيث ف الفرق بين الرتب المتناظرة فإن معامل الارتباط سبيرمان يساوي:

أ) $\frac{٨}{٣٣}$ ب) $\frac{٤}{٣٣}$ حـ) $\frac{٢٥}{٣٣}$ د) $\frac{٢٩}{٣٣}$

٨٣) لحساب معامل الارتباط بين المتغيرين (س،ص) وجد أن ن=٢٠، $\overline{س}$=٧، $\overline{ص}$=١٥،
$\sum$(س$_ر$ − $\overline{س}$)^2 =٤٩، $\sum$(ص$_ر$ − $\overline{ص}$)^2= ٣٦٠٠، $\sum$(س − $\overline{س}$) (ص − $\overline{ص}$) = ٣٥٠
فإن معامل الارتباط بيرسون يساوي:

أ) $\frac{١}{٢٤}$ ب) $\frac{١}{٦}$ حـ) $\frac{٥}{٦}$ د) $\frac{١}{٤}$

٨٤) إذا كان ر يمثل معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فإذا ضربت قيم كل من س، ص في (−٣) ثم أضيف إلى كل ناتج العدد (٤) فإن معامل الارتباط للقيم الناتجة يساوي:

أ) ر ب) −٣ر+٤ حـ) −٣ر د)٣ر

٨٥) س، ص متغيران عشوائيان يأخذ كل منهما (١٢) قيمة فإذا كان مجموع مربعات الفروق بين رتب هذه القيم (٦٠) فإن قيمة معامل الارتباط سبيرمان يساوي:

أ) $\frac{١١٣}{١٤٣}$ ب) − $\frac{١١٣}{١٤٣}$ حـ) $\frac{٣٠}{١٤٣}$ د) − $\frac{٣٠}{١٤٣}$

٨٦) حسب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فكان ٠,٧ فإن طبيعة الارتباط بين س، ص.

أ) ارتباط تام ب)لا يوجد ارتباط حـ)ارتباط طردي د)ارتباط عكسى

٨٧) حسب معامل الارتباط بين قيم المتغيرين (س، ص) بطريقة سبيرمان فكان (٠,٥) وكان عدد الأزواج المرتبة(س$_ر$، ص$_ر$) يساوي (١٠) فإن مجموع مربعات الفروق بين الرتب المتناظرة يساوي:

أ) ٥ ب) ٢٠ حـ) ٨٢,٥ د) ٩٢,٥

٨٨) حسب معامل الارتباط بين المتغيرين (س، ص) فكان (٠,٦) وحسب الانحراف المعياري للمتغير س فكان (١٦) والانحراف المعياري للمتغير ص فكان (١٠) فإن ميل معادلة خط انحدار ص على س يساوي:

(أ) ٠,٦٢٥ ب) ٠,٣٧٥ حـ) ٠,٩٦ د) ٠,٦

٨٩) حسب الوسط الحسابي للمتغير س فكان (٦٠) وحسب الوسط الحسابي للمتغير ص فكان(٧٠) وكان معادلة انحدار ص على س هي ص= $\frac{١}{٣}$ س+ أ فإن قيمة أ تساوي:

أ) ٢٠ ب) ٦٠ حـ) ٥٠ د) ٣٦,٦٧

٩٠) إذا كانت معدلة خط انحدار لعلامات الفيزياء ص على علامات الرياضيات س هي ص= $\frac{١}{٣}$ س+٥٠ فإذا كانت علامة طالب في الرياضيات ٩٠ فإن علامة هذا الطالب المتنبأ بها في الفيزياء تساوي:

أ) ٣٠ ب) ٩٠ حـ) ٨٠ د) ٥٠

٩١) إذا كان (س، ص) متغيرين بحيث أن لهما نفس الانحراف المعياري وان معامل الارتباط بينهما يساوي (٠,٥) وأن $\sum_{ر=١}$(س ر− $\overline{س}$) (ص ر− $\overline{ص}$) =٩٠ فإن الانحراف المعياري للمتغير س يساوي:

أ) ٣ ب)٠,٢٥ حـ) $\frac{٢}{٩}$ د) غير ذلك

٩٢) لإيجاد معادلة خط الانحدار ص=أ س+ب وجد أن $\overline{س}$ = ٦٠ ، $\overline{ص}$= ٧٥، ب= ١٥ فإن قيمة أتساوي:

أ) ١ ب) $\frac{١٥}{٧٥}$ حـ) $\frac{١٥}{٦٠}$ د) $\frac{٦٠}{٧٥}$

٩٣) إذا كانت معادلة انحدار ص على س هي ص = ٠,٣٦ س + ١٧ ومعادلة انحدار س على ص هي س = ص − ٣ فإن معامل الارتباط بيرسون يساوي:

أ) ٠,٣٦ ب) −٠,٣٦ حـ) ٠,٦ د) −٠,٦

٩٤) إذا كانت معادلة انحدار ($\frac{ص}{س}$) هي: ص= ٢ س+ ١١ ومعادلة انحدار ($\frac{س}{ص}$)هي س = $\frac{١}{٥}$ص + ٢٠ فإن الوسط الحسابي للمتغير س يساوي:

أ) ١١ ب)٢٠ حـ) ٨٥ د) ٣٧

٩٥) لديك معاملات ارتباط هي:ر١ = ٠,٣، ر٢ = ٠,٨٩، ر٣ = ٠,٨، ر٤ = −٠,٩٢ فإن معامل الارتباط الذي يعّبر عن أقوى علاقة هو:

أ) ر٣ ب) ر٢ حـ) ر١ د) ر٤

*** ليكن لدينا التجربة هي إلقاء حجر نرد مرتين إذا كان:

الحدث أ = مجموع العددين الظاهرين اكبر من ١٠.

الحدث ب= مجموع العدديين الظاهرين يقبل القسمة على ٥.

الحدث حـ= الفرق المطلق بين العدديين الظاهرين = ٥.

الحدث د = الفرق المطلق بين العدديين الظاهرين يقبل القسمة على ٣.

اعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (٩٦-٩٩)

٩٦) الحدث ب هو

أ) {(٤،١)، (١،٤)، (٢،٣)}

ب){(١،٤) ، (٤،١) ، (٣،٢) ، (٢،٣) ، (٤،٦) ، (٦،٤) ، (٥،٥)}

حـ){(١،٤) ، (٤،١) ، (٣،٢) ، (٥،٢) ، (٥،٥)}

د){(١،٤)،(٦،٤)،(٤،٦)،(٥،٥)}

٩٧) عدد عناصر الحدث د هو:

أ) ١٤ ب) ٨ حـ) ١٣ د) غير ذلك

٩٨) احتمال الحدث حـ يساوي:

أ) $\frac{١}{٩}$ ب) $\frac{١}{١٨}$ حـ) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{٢}{٩}$

٩٩) عدد عناصر الحدث أ يساوي:

(أ) ٦ ب) ٣ حـ) ١٠ د) ١٢

١٠٠) صندوق فيه كرتان حمراوان و(٣) كرات زرقاء فإن عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل سحب (٣) كرات على التوالي دون إرجاع يساوي:

(أ) ٦٠ ب) ١٠ حـ) ٢٠ د) ١٢٥

١٠١) صندوق به(٧) مصابيح، (٤) منها سليمة سحب ثلاثة مصابيح على التوالي دون إرجاع فإن عدد عناصر الحدث الذي يمثل ظهور أحدها سليم والآخرين تالفان

أ) ١٢ ب) ٢٤ حـ) ٣٥ د) ٤

*** إذا كان نسبة الذين يتحدثون الإنجليزية في مجتمع ما يساوي(٦٠٪) والذين يتحدثون الفرنسية في نفس المجتمع (٥٠٪) والذين يتحدثون اللغتين معا (٢٠٪)اختير شخص بشكل عشوائي.

فأعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (١٠٢-١٠٥)

١٠٢) احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية:

أ) ٠,٩ ب) ٠,٥ حـ) ٠,٤ د) ٠,٨

١٠٣) احتمال أن يتحدث إحدى اللغتين على الأقل:

أ) ٠,٩ ب)٠,٥ حـ)٠,٤ د)٠,١

١٠٤) احتمال أن يتحدث الفرنسية ولا يتحدث الإنجليزية:

أ) ٠,٩ ب) ٠,٤ حـ)٠,٣ د)٠,١

١٠٥) احتمال أن لا يتحدث الإنجليزية ولا يتحدث الفرنسية:

أ) ٠,٩ ب)٠,٨ حـ)٠,١ د)٠,٢

١٠٦) كيس به (٧) كرات حمراء ، (٥) كرات سوداء سحبت من الكيس (٣)كرات على التوالي دون إرجاع فإن احتمال الحصول على كرتين حمراوين يساوي:

أ) ٠,٤٢٥ ب)٠,٤٧٧ حـ)٠,٦ د)٠,٣٨١

١٠٧) إذا كان ح(أ) = ٠,٤، ح (ب) =٠,٣ وكان أ، ب حادثين منفصلين في الفضاء العيني Ω فإن ح(أ ∪ب) يساوي:

أ) ٠,١ ب) ٠,٦ حـ) ٠,٧ د) ٠,٥٨

١٠٨) إذا كان ح(أ$_١$) = ٢ ح (أ$_٢$) = ٣ ح (أ$_٣$) كانت الحوادث أ$_١$، أ$_٢$، أ$_٣$ حوادث متباعدة وشاملة في Ω فإن ح (أ$_٣$) يساوي:

أ) $\frac{٦}{١١}$ ب) $\frac{٣}{١١}$ حـ) $\frac{٢}{١١}$ د) $\frac{١}{٢}$

١٠٩) إذا كان أ$_١$، أ$_٢$ حادثين مستقلين في Ω وكان ح (أ$_١$)= ٢ ح (أ$_٢$)، ح (أ$_١$ ∪ أ$_٢$) = $\frac{٥}{٨}$

فإن ح(أ$_١$) يساوي:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ حـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٢}{٣}$

١١٠) ليكن أ١، أ٢ حدثين في Ω بحيث أن ح(أ$_١$)= ٠,٦٥، ح (أ$_٢$) =٠,٨ ح(أ$_١$ ∩ أ$_٢$) = ٠,٥٥ فإن ح($\bar{أ}_١$ / أ$_٢$)=

أ) $\frac{١١}{١٦}$ ب) $\frac{٥}{١٦}$ حـ) $\frac{١١}{١٣}$ د) $\frac{٥}{١٣}$

١١١) س متغير عشوائي لتوزيع ذات الحدين، ت (س) =٣٦ وكان احتمال نجاح التجربة

في المرة الواحدة (٠,٢٥ ن) حيث ن عدد مرات إجراء التجربة فإن قيمة ن تساوي:

أ) ١٤٤ ب) ١٢ حـ) ٩ د) ٨١

١١٢) إحدى شركات الكمبيوتر، ترسل رسائل عبّر شبكة الإنترنت ، فإذا كان احتمال وجود خطأ في آيه رسالة ٢٪ و أرسلت الشركة في إحدى الأيام (١٠٠٠) رسالة ما احتمال عدم وجود خطأ في (٢٠) رسالة :

أ) ٠,٦٦٧ ب) ٠,٠١١ حـ) صفر د) غير ذلك

١١٣) تقّدم طالب لامتحانين في الرياضيات والعلوم،فإذا كان احتمال نجاحه في الرياضيات ٠,٧ واحتمال نجاحه في العلوم إذا نجح في الرياضيات ٠,٨ فإن احتمال نجاحه في المادتين معا يساوي:

أ) ٠,٨٧٥ ب) ٠,٥٦ حـ) ٠,٩٤ د) ٠,٤٤

*** الجدول التالي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير س

س	٢	٤	٦
ح(س)	أ	٣أ	ب

وكان ت(س) = ٤

اعتمد على هذه المعلومات في الإجابة عن الأسئلة (١١٤-١١٥)

١١٤) قيمة أ تساوي:

أ)٠,١ ب) ٠,٢ حـ) ٠,٣ د) المعلومات غير كافية .

١١٥) قيمة ب تساوي:

أ) ٠,٢ ب) ٠,٤ حـ) ١ د)-٠,٢

١١٦) إذا كانت تجربة إلقاء قطعة نقد غير متزنة واحتمال ظهور الصورة ثلاثة أمثال ظهور الكتابة فإن احتمال طهور الكتابة يساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{١}{٣}$

١١٧) محل لبيع الألبسة يربح في الأيام العادية (١٠) دنانير وفي الأيام الماطرة يخسر (٥) دنانير وفي أيام الأعياد والمناسبات يربح (١٠٠) دينار فإذا علمت بأن النسبة المئوية للأيام العادية (٦٠٪) وللأيام الماطرة (١٠٪) ولأيام الأعياد والمناسبات (٣٠٪) اختير أحد الأيام بشكل عشوائي فإن توقع ربحه في ذلك اليوم بالدينار يساوي:

أ) ١٠٥ ب)٣٥,٥ حـ) ٣٦,٥ د) ٣٠

١١٨) إذا كان س متغير ذات الحدين بحيث أن ن=٢٠ ، ب= $\frac{١}{٥}$ فإن تباين س يساوي:

أ) ٤ ب) ٢ حـ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{١٦}{٥}$

١١٩) إذا كان س متغير ذات الحدين بحيث أن ن=٤، ب= $\frac{١}{٢}$ فإن ح(س = ٢) =

أ) $\binom{٤}{٢}$ ب) $\frac{١}{٢}\binom{٤}{٢}$ حـ) $\frac{١}{١٦}\binom{٤}{٢}$ د) $\frac{١}{١٦}\binom{٢}{٤}$

١٢٠) الرقم القياسي عبارة عن:

أ) عدد نقارن به التغير المطلوب الذي يصيب ظاهرة ما

ب) عدد نقارن به التغير العشوائي لظاهرة ما

حـ) عدد نقارن به التغيرات الأخيرة التي أصابت ظاهرة ما.

د) عدد نقارن به التغير النسبي الذي يصيب ظاهرة أو عدة ظواهر نظرا لاختلاف الزمان أو المكان .

*** اعتمد على الجدول التالي في الإجابة عن الأسئلة (١٢١-١٢٣) معتبرا سنة ١٩٩٥ هي الأساس

السلعة	السعر عام ١٩٩٥	السعر عام١٩٩٧	الكمية عام ١٩٩٥	الكمية عام١٩٩٧
أ	٥	١٠	١٠٠	١٠٠
ب	١٠	١٠	٢٠٠	١٠٠
حـ	٢٠	٢٠	١٠٠	٢٠٠
د	٤٠	٢٠	٢٠٠	٢٠٠

١٢١) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار يساوي:

أ) ١١٢,٥ ٪ ب) ٨٠ ٪ حـ) ٤٥٠٪ د) ١٢٥ ٪

١٢٢) رقم لاسبير للكميات يساوي:

أ)١٠٨ ٪ ب) ٨٠ ٪ حـ) ٧٢ ٪ د) ٧٤ ٪

١٢٣)رقم باش للأسعار يساوي:

أ) ٧٤ ٪ ب) ٧٢ ٪ حـ) ٨٠ ٪ د) ١٠٨ ٪

١٢٤) السلسلة الزمنية هي:

أ) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت بطريقة عشوائية.

ب) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت على فترات زمنية متتالية.
حـ) مجموعة من المشاهدات الإحصائية التي أخذت في زمن واحد.
د) مجموعة من المشاهدات الإحصائية أخذت بطريقة منتظمة.

١٢٥) سلسلة زمنية عدد عناصرها (١٥٧) فإن عدد الأوساط المتحركة بطول (١٥) يساوي

أ) ١٤٢ ب) ١٥ جـ) ١٤١ د) ١٤٣

١٢٦) في السلسلة الزمنية(١، ٣، ٦، ٩، ١٨، ١٥) فإن المعدل المتحرك الثالث بطول (٣) يساوي:

أ) ٣,٣٣ ب) ١١ حـ) ٦ د) ١٤

١٢٧) معامل الخشونة للسلسلة الزمنية (٣، ٣، -٣) يساوي:

أ) ١,٣٥ ب) ٤,٠٥ حـ) ١,٨ د) -١,٨

١٢٨) المعادلة التالية س = ٠,٩١ ن+ ٥,٩١ تمثل معادلة الاتجاه العام لميزانية التعليم العالي إذا علمت بأن بداية التقدير هي سنة ١٩٨٦ فإن الميزانية التقديرية عام ٢٠٠١ تساوي:

أ) ١٩,٥٦ ب) ١٣,٦٥ حـ) ٢٠,٤٧ د) ١٤,٥٦

١٢٩) من أسباب التحرك السكاني:

أ) الوضع الاقتصادي. ب) الموقع الجغرافي
حـ) أسباب قسرية كالحروب د) جميع ما ذكر

١٣٠) إذا كان عدد المهاجرين لبلد ما يساوي (مليون) مهاجر وعدد المهاجرين منه يساوي (٣) ملايين مهاجر وعدد الوفيات فيه (مليون ونصف) وعدد المواليد (٣) مليون فإذا كان عدد سكان هذا البلد في منتصف العام يساوي (٧٥) مليون فإن معدل الزيادة الطبيعية تساوي:

أ) ٦,٦٧ لكل ألف ب) ٢٠ لكل ألف حـ) -١٣,٣٣ لكل ألف د) ٤٦,٦٧ لكل ألف

١٣١) إذا كان عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة (١٢٥٠٠) وعدد المواليد أحياء (٢٢٥٠٠٠) طفل فإن معدل وفيات الأمومة تساوي:

أ) ٥,٥٥ لكل ألف ب) ٥٥٥,٥٥ لكل ألف حـ) ٥٥.٥٥ لكل ألف د) ١٨ لكل ألف

١٣٢) إذا كان عدد المواليد أحياء في بلد ما هو (٢٤٠٠٠) وكان عدد السكان في ١٩٧٠/٧/١ يساوي (٢٤) مليون فإن معدل الولادة الخام يساوي :

أ) ١ لكل ألف ب) ١٠ لكل ألف حـ) ١٠٠ لكل ألف د) غير ذلك

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية:

١- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض: (مقدمة في الإحصاء)، دار جون وايلي وأبنائه، نيويورك، الطبعة الأولى، ١٩٨٢.

٢- د. زياد رمضان: (مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي)، الطبعة الثالثة، ١٩٨٣.

٣- د. موراي ر. شبيجل، ترجمة د. شعبان عبدالحميد: (نظريات ومسائل في الإحصاء)، دار ماكجروهيل للنشر، ١٩٧٢.

٤- محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض: (مبادئ الإحصاء) دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الأولى، ١٩٨٢.

٥- كامل فليفل، فتحي حمدان: (مبادئ الإحصاء للمهن التجارية)، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، الطبعة الثالثة، ١٩٩٩.

٦- محمد حسين محمد رشيد: (الإحصاء في التربية)، دار الصفاء للنشر، عمان، الطبعة الأولى، ٢٠٠٢.

٧- د. يحيى سعد زغلول: (مقدمة في الإحصاء التطبيقي)، الدار الجامعية، بيروت، ١٩٨٨.

٨- د. عبدالعزيز فهمي هيكل، د. يحيى سعد زغلول: (التحليل الإحصائي)، الدار الجامعية، بيروت، ١٩٨٦.

٩- سيمور ليبشتز: (نظريات ومسائل في الاحتمالات) دار ماكجروهيل للنشر ترجمة د. سامح داود، الطبعة العربية، ١٩٧٧.

١٠- عوض منصور، عزام صبري، محمد القادري، عبد الرحمن سالم: (مبادئ الإحصاء)، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان، ٢٠٠١.

المراجع الأجنبية :

1- Chase, C.L. Elementary Statistical Procedures , Third Edition, Mc Graw-Hill, Book co. New York, 1984.

2- William Mendenhall, Introduction to probability and statistics, four edition, 1969.

3- Hays, W.L "Statistics for the Social Science, 3rd edition, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

4- STATISTICAL Reasoning in Psychology and education, 2nd edition, John Wiley & sons 1978.

الملاحق

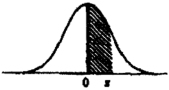
جدول الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65258	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21681	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	78547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75986
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
86181	78949	86601	46258	00477	25234	09903	36574	72139	70185
54308	21154	97810	86764	82869	11785	55261	59009	38714	38723
65541	34371	09591	07889	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05325
53298	90276	62545	21944	16580	03878	07516	95715	02526	33537

2. جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$Z:N(0, 1)$

المساحة المظللة تمثل $P(0 < Z < z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

أخذت البيانات في هذا الجدول من كتاب «مبادئ الإحصاء لطلبة العلوم الإداريه والإقتصاد» تأليف هويل وجيسين.

The data in this table are extracted from Table IV from Hoel and Jessen, *Basic Statistics for Business and Economics*, 2nd ed., (1977), John Wiley Sons.