دراسة
للاستشارات والدراسات والترجمة
خدمات أكاديمية
كفاءات وطنية
معايير عالمية
UNIVERSITY
drasah1
www.drasah.com
00966555026526
00966560972772
info@drasah.com


شركة دراسة
للاستشارات و الدراسات والترجمة
خدماتنا
توفير المراجع العربية والأجنبية
التحليل الاحصائي وتفسير النتائج
الاستشارات الأكاديمية
جمع المادة العلمية
الترجمة المعتمدة
drasah1
info@drasah.com
00966555026526
00966560972772
drasah.com


دراسة
للاستشارات والدراسات والترجمة
تواصل معنا
00966555026526
00966560972772
متواجدون على مدار الســـاعة

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

I- معنى التشتت

II- قياس تشتت البيانات

II-1- المدى العام

II-2- المدى الربيعي

II-3- الانحراف المتوسط

II-4- التباين والانحراف المعياري

II-5- مقاييس التشتت النسبي

II-5-1- معامل الاختلاف النسبي

II-5-2- معامل الاختلاف الربيعي

تمهيد:

مقاييس النزعة المركزية لا تكفي لإعطاء صورة كاملة عن علاقة البيانات ببعضها البعض، فقد نجد أن لسلسلتين مختلفتين نفس المتوسط الحسابي، بينما مدى البيانات للسلسلتين مختلف، هذا الفرق في البيانات مقابل تساوي المتوسط الحسابي يجعل من الضرورة استخدام مقاييس أخرى تكمل المقاييس الأولى، وتسمى هذه المقاييس بمقاييس التشتت.

مقاييس التشتت هي عبارة عن مقاييس إحصائية هدفها قياس مدى تشتت و تباعد البيانات عن بعضها البعض، وتكمن أهميتها في كون أنه لا يمكن أن نتصور مثلا تساوي الإنتاج في جميع المؤسسات الصناعية أو تساوي مستوى الخدمات في جميع المصلحات الخدماتية أو تساوي جميع أطوال الأشخاص...إلخ، وبالتالي فإن استخدام قيمة واحدة لوصف التوزيع التكراري قد تكون مضللة أحيانا.

مثلا: إذا كانت لدينا السلسلتان الإحصائيتان التاليتان:

السلسلة الأولى:	**0**	**14**	**7**
السلسلة الثانية:	**7**	**6**	**8**

إن المتوسط الحسابي لكل من السلسلتين هو 7، فإذا اكتفينا بهذا المقياس فإننا نقرر بأن المجموعتين متشابهتين، ولكن في الحقيقة إن قيم السلسلة الأولى أكثر تباعد من قيم السلسلة الثانية، وهنا يأتي دور مقاييس التشتت أو الاختلاف لتضيف هذه الناحية في البيانات الإحصائية.

I–معنى التشتت:

تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة، أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول أن مفردات (قيم) الظاهرة مشتتة وغير مركزة.

II–قياس تشتت البيانات:

هناك بعض المقاييس تقيس تقارب أو تباعد القيم عن بعضها البعض وهي المدى والانحراف الربيعي، ومقاييس أخرى تقيس قرب أو بعد القيم من قيمة معينة كالمتوسط الحسابي مثلا وهي الانحراف المتوسط والانحراف المعياري.

II–1– المدى العام:

يستخدم هذا المقياس عندما يكون الهدف هو الحصول على مقياس سريع لمدى تشتت القيم دون الاهتمام الكبير بالدقة في القياس أو حين ما يكون للمفردات (القيم) المتطرفة أهمية خاصة.

المدى لمجموعة من البيانات هو الفرق بين أكبر قيمة في البيانات وأصغر قيمة لها ويرمز له بالرمز R ، وهو معطى بالعلاقة التالية:

المدى العام = أكبر قيمة – أصغر قيمة $$R = X_{max} - X_{min}$$

حالة خاصة: المدى العام في حالة توزيع تكراري بفئات يحسب بعدة طرق:

المدى العام = مركز الفئة الأخيرة – مركز الفئة الأولى $$R = C_k - C_1$$

المدى العام = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى $$R = U_k - L_1$$

مثال (4–01):

أوجد المدى للبيانات التالية:

12	18	28	22	30

الحل:

المدى العام = أكبر قيمة – أصغر قيمة $$R = X_{max} - X_{min} = 30 - 12 = 8$$

❖ **خواص المدى العام:**

- بسيط الحساب وسهل الفهم ويعتمد في حسابه على قيمتين فقط؛
- شديد التأثر بالقيم المتطرفة؛
- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة.

II–2– المدى الربيعي:

للتخلص من بعض عيوب المدى والتي من أهمها تأثره بالقيم المتطرفة وعدم إمكانية حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة، وجد مقياس آخر وهو المدى الربيعي حيث نقوم في هذا المقياس بإهمال الربع الأول والربع الأخير من البيانات المرتبة تصاعديا، وفي هذه الحالة تكون أكبر قيمة في البيانات هي الربيع الثالث وأصغر قيمة في البيانات هي الربيع الأول، والفرق بينهما يعطي ما يسمى بالمدى الربيعي.

يستخدم هذا المقياس إذا كان الوسيط هو المقياس المناسب للنزعة المركزية أو عندما تكون هناك قيم متطرفة جدا، ويتم حساب هذا المقياس من البيانات الأولية أو جداول التوزيع التكرارية باستخدام العلاقة التالية:

المدى الربيعي $I_Q = Q_3 - Q_1$

مثال (4–02): أحسب المدى الربيعي للبيانات التالية:

الأجر X_i	]20 – 10]	]30 – 20]	]40 – 30]	]50 – 40]	]60 – 50]	]70 – 60]
عدد العمال n_i	**18**	**30**	**25**	**17**	**12**	**8**

الحل:

الجدول رقم (4–01): يوضح كيفية تحديد فئة الربيع الأول والثالث

فئات الأجر X_i	التكرار n_i	$n_i \uparrow$
]20 – 10]	**18**	**18**
]30 – 20]	**30**	**48**
]40 – 30]	**25**	**73**
]50 – 40]	**17**	**90**
]60 – 50]	**12**	**102**
]70 – 60]	**8**	**110**
$\sum$	**110**	**–**

رتبة الربيع الأول

رتبة الربيع الثالث

- **حساب الربيع الأول Q_1:**

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - N_0}{n_{Q_1}} \times k = 20 + \frac{27,5 - 18}{30} \times 10 = 23,17 \times 10^3 \, DA$$

- **حساب الربيع الثالث Q_3:**

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - N_0}{n_{Q_3}} \times k = 40 + \frac{82,5 - 73}{17} \times 10 = 45,59 \times 10^3 \, DA$$

المدى الربيعي $$I_Q = Q_3 - Q_1 = 45,59 - 23,17 = 22,42$$

❖ **خواص المدى الربيعي:**

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة ويمكن حسابه بيانيا؛
- يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها؛
- يستخدم كمقياس للتشتت في التوزيعات التكرارية شديدة الالتواء؛
- عبارة عن فترة تحتوي على 50% من البيانات.

II-3- الانحراف المتوسط:

مقاييس التشتت هي مقاييس لقوة تجمع البيانات حول بعضها، ومن حيث أن التجمع يكون حول قيمة متوسطة، فإذا كان مقدار الاختلاف (الانحراف) بين القيم ومتوسطها كبيرا دلّ ذلك على عدم تجانسها والعكس صحيح.

II-3-1- تعريف الانحراف المتوسط:

يعرف الانحراف المتوسط بأنه المتوسط الحسابي للقيم المطلقة لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي ونرمز للانحراف المتوسط بالرمز $E_{\overline{X}}$.

II-3-2- حساب الانحراف المتوسط:

II-3-2-1- حساب الانحراف المتوسط من البيانات الأولية:

إذا كانت: $x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n$ تمثل مفردات (قيم) ظاهرة معينة X، فإن الانحراف المتوسط معطى بالعلاقة التالية:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\left|x_1 - \overline{X}\right| + \left|x_2 - \overline{X}\right| + \ldots\ldots + \left|x_n - \overline{X}\right|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i - \overline{X}\right|}{n}$$

مثال (4-03): أوجد الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

2	3	5	6	9

الحل:

المتوسط الحسابي لهذه البيانات هو: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$

X_i	2	3	5	6	9	$\sum$
$\lvert x_i - \overline{X} \rvert$	3	2	0	1	4	10

وعليه فإن الانحراف المتوسط لهذه البيانات هو: $E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{X} \rvert}{n} = \frac{10}{5} = 2$

II-3-2-2- حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة:

إذا كانت: $x_1 , x_2 ,......., x_k$ تمثل مفردات (قيم) أو مراكز الفئات لظاهرة معينة X ، وكانت $n_1 , n_2 ,....., n_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها فإن:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\lvert x_1 - \overline{X} \rvert n_1 + \lvert x_2 - \overline{X} \rvert n_2 + ... + \lvert x_k - \overline{X} \rvert n_k}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lvert x_i - \overline{X} \rvert n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

حيث : x_i : تمثل قيم المتغير أو مراكز الفئات

n : تمثل التكرار المقابل لقيم المتغير أو للفئات

مثال (4-04):

أوجد تشتت البيانات المبوبة في الجدول التالي باستخدام الانحراف المتوسط.

الأجر X_i	]10 – 20]	]20 – 30]	]30 – 40]	]40 – 50]	]50 – 60]	]60 – 70]
عدد العمال n_i	18	30	25	17	12	8

الحل:

الجدول رقم (4-02): كيفية حساب الانحراف المتوسط

فئات الأجر X_i	التكرار n_i	مركز الفئة $x_i(C_i)$	$x_i n_i$	$\lvert x_i - \overline{X}\rvert$	$\lvert x_i - \overline{X}\rvert n_i$
$]20-10]$	18	15	270	19,9	358,2
$]30-20]$	30	25	750	9,9	297
$]40-30]$	25	35	875	0,1	2,5
$]50-40]$	17	45	765	10,1	171,1
$]60-50]$	12	55	660	20,1	241,2
$]70-60]$	8	65	520	30,1	240,8
$\sum$	110	-	3840	-	1310,8

المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{4} n_i} = \frac{3840}{110} = 34,9 \times 10^{3}\ DA$$

الانحراف المتوسط:

$$E_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \overline{X}\rvert n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1310,8}{110} = 11,92$$

II-3-3- خواص الانحراف المتوسط:

- يتأثر بالقيم المتطرفة ويعتمد في حسابه على جميع القيم؛
- لا يمكن حسابه في حالة جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يمكن حسابه عن طريق الانحرافات عن الوسيط مع الملاحظة أن الانحراف المتوسط عن الوسيط أقل من الانحراف المتوسط عن المتوسط الحسابي.

II-4- التباين والانحراف المعياري:

II-4-1- التباين: هو عبارة عن المتوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي ومتوسطها الحسابي[1]، ونستخدم مربعات الفروق هنا تفاديا لاستخدام القيم المطلقة كما هو الشأن في الانحراف المتوسط، ويرمز للتباين بالرمز σ^2 أو $V(X)$ في حالة بيانات المجتمع و S^2 في حالة العينة.

تعطى علاقة التباين للمجتمع بـ:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

وأحيانا يطرح العدد واحد من المفردات (n-1) أو من مجموع التكرارات وذلك عند تقدير مقياس التباين والانحراف المعياري للعينات الصغيرة الحجم وأن العدد واحد يمثل درجات الحرية (تعتبر العينة كبيرة إذا زاد حجمها عن 30 مشاهدة)[2]، ولحساب التباين نميز حالتان:

II-4-1-1- حساب التباين من البيانات الأولية:

- **تباين المجتمع:** إذا كانت القيم $x_1 , x_2 , \dots\dots , x_N$ تمثل بيانات مجتمع ما، فإن التباين لهذا المجتمع يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2 - N\mu^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2$$

حيث: μ هو المتوسط الحسابي للمجتمع، أي أنّ: $\mu = \frac{\sum x_i}{N}$.

- **تباين العينة:** إذا كانت القيم $x_1 , x_2 , \dots\dots , x_n$ تمثل بيانات عينة ما و كان $\overline{X}$ متوسطها الحسابي، فإن تباين العينة معطى بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - n\overline{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

مثال (4-05): أوجد التباين للبيانات التالية:

9	6	5	3	2

الحل: المتوسط الحسابي لهذه البيانات هو: $\overline{X} = 5$

---

[1]- مصطفى يوسف كافي وآخرون، مرجع سابق، ص 127.

[2]- وليد إسماعيل السيفو وآخرون، مرجع سابق، ص 146.

X_i	2	3	5	6	9	$\sum$
$(x_i-\overline{X})^2$	9	4	0	1	16	30

وعليه فإن التباين لهذه البيانات هو: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{30}{4} = 7,5$

II-4-1-2- حساب التباين من البيانات المبوبة:

❖ **تباين المجتمع**: إذا كانت: $x_1 , x_2 ,......, x_k$ تمثل مفردات (قيم) أو مراكز الفئات لبيانات مجتمع ما (حجمه N عنصر)، و $n_1 , n_2,......, n_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها، فإن تباين المجتمع معطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2 n_i}{N} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{N} - \mu^2$$

❖ **تباين العينة**: إذا كانت: $x_1 , x_2 ,......, x_k$ تمثل مفردات (قيم) أو مراكز الفئات لبيانات عينة ما (حجمها n عنصر)، و $n_1 , n_2,......, n_k$ تمثل التكرارات المقابلة لها، وكان $\overline{X}$ متوسطها الحسابي فإن تباين العينة معطى بالعلاقة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2 n_i}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 n_i - n\overline{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 n_i - \frac{(\sum x_i n_i)^2}{n}\right]$$

II-4-2- الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري: الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين[1]، ويعتبر من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت وأكثرها استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية، ويرمز له بالرمز σ في حالة بيانات المجتمع و S في حالة بيانات العينة.

ولتوضيح كيفية حساب التباين والانحراف المعياري نأخذ المثال التالي:

مثال (4-06): البيانات التالية تمثل توزيع أجور عمال مؤسسة ما (الوحدة: 10^3 دج).

الأجر X_i	]20 – 10]	]30 – 20]	]40 – 30]	]50 – 40]	]60 – 50]	]70 – 60]
عدد العمال n_i	18	30	25	17	12	8

المطوب: أوجد تشتت أجور عمال هذه المؤسسة ؟

[1] – محمد صبحي أبو صالح وعدنان محمد عوض، مرجع سابق، ص 43.

الحل:

أفضل مقياس لقياس التشتت هو الانحراف المعياري: ومن أجل حساب الانحراف المعياري نقوم في البداية بحساب المتوسط الحسابي ثم التباين لنقوم في الأخير بحساب الانحراف المعياري.

الجدول رقم (4-03): يوضح كيفية حساب التباين

فئات الأجر X_i	التكرار n_i	مركز الفئة x_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^2 n_i$
$]20-10]$	18	15	270	4.050	$-19,9$	7128,18
$]30-20]$	30	25	750	18.750	$-9,9$	2940,3
$]40-30]$	25	35	875	30.625	0,1	0,25
$]50-40]$	17	45	765	34.425	10,1	1734,17
$]60-50]$	12	55	660	36.300	20,1	4848,12
$]70-60]$	8	65	520	33.800	30,1	7248,08
$\sum$	110	-	3840	157.950	-	23899,1

- المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{6} n_i} = \frac{3840}{110} = 34,91 \times 10^3 DA$$

حساب التباين:

✓ الطريقة الأولى:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{X})^2 n_i}{n-1} = \frac{23899,1}{109} = 219,26$$

✓ الطريقة الثانية:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 n_i - n\overline{X}^2\right] = \frac{1}{109}\left[157.950 - 110(34,91)^2\right] = 219,26$$

- حساب الانحراف المعياري: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{219,26} = 14,81$

❖ **خواص الانحراف المعياري:**

- لا يمكن حسابه من جداول التوزيع التكراري المفتوحة؛
- يتأثر بالقيم المتطرفة؛
- قابل للعمليات الجبرية لذلك فهو كثير الاستخدام في القوانين والنظريات الإحصائية؛
- يأخذ نفس وحدة القياس للمتغير الأصلي؛
- يمكن الاعتماد عليه للمقارنة بين تشتت توزيعين إحصائيين من نفس النوعية ولهما نفس المتوسط الحسابي.

II-5- مقاييس التشتت النسبي:

هي مقاييس تستخدم للمقارنة بين مجموعتين من البيانات المختلفة في وحدات القياس، فهي مقاييس خالية من وحدات القياس، ويمكن وصفها بأنها مقاييس نسبة، ومن أهمها:

II-5-1- معامل الاختلاف النسبي:

وهو عبارة عن النسبة المئوية للانحراف المعياري منسوبا إلى المتوسط الحسابي، فكلما كانت قيمة هذا المعامل كبيرة دلّ ذلك على وجود تشتت كبير بين مفردات التوزيع والعكس صحيح، ويرمز لهذا المعامل بالرمز (C.V)، ويتم حسابه كما يلي:

- **بيانات المجتمع:** $$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$
- **بيانات العينة:** $$C.V = \frac{S}{\overline{X}} \times 100$$

مثال (4-07): أوجد معامل الاختلاف لمجموعتين من درجات الطلبة في مادة الإحصاء حسب المعطيات أدناه:

	المجموعة A	المجموعة B
المتوسط الحسابي	40	33
الانحراف المعياري	24	16

الحل:

- نحدد معامل اختلاف **المجموعة A**: $C.V_A = \frac{S}{\overline{\overline{X}}} \times 100 = \frac{24}{40} \times 100 = 0.6 \times 100 = 60\%$
- نحدد معامل اختلاف **المجموعة B**: $C.V_B = \frac{S}{\overline{\overline{X}}} \times 100 = \frac{16}{33} \times 100 = 0.48 \times 100 = 48\%$

بالمقارنة نجد أن تشتت **المجموعة A** أكبر من تشتت **المجموعة B** التي تعتبر أكثر تجانسا وأقل ابتعادا عن قيمتها المتوسطة.

❖ **خواص معامل الاختلاف النسبي:**

- يقيس الاختلاف النسبي دون وحدة تمييز؛
- ليس له معنى إذا كانت المتوسطات الحسابية معدومة؛
- يستخدم لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات من حيث التشتت، خاصة إذا اختلفت متوسطاتها الحسابية.

II-5-2- معامل الاختلاف الربيعي:

يستخدم هذا المعامل في حالة توزيع تكراري مفتوح، ويرمز له بالرمز C.Q.V، وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$C.Q.V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100$$

مثال (4-08): لنأخذ معطيات المثال (4-02) ونقوم بحساب معامل الاختلاف الربيعي.

الحل:

بعد حساب كل من الربيع الأول والثاني والثالث توصلنا إلى النتائج التالية:

$Q_1 = 23{,}17 \times 10^3 DA$ و $Q_2 = 32{,}8 \times 10^3 DA$ و $Q_3 = 45{,}59 \times 10^3 DA$

وعليه نقوم بحساب معامل الاختلاف الربيعي بتطبيق العلاقة التالية:

$$C.Q.V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100 = \frac{45{,}59 - 23{,}17}{32{,}8} \times 100 = 68{,}35\,\%$$

الاستنتاج: نقول أنّ: تشتت هذه البيانات هو تشتت كبير نتيجة لكون قيمة معامل الاختلاف الربيعي تساوي $68{,}35\,\%$.

تمارين الفصل الرابع:

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

إذا كانت: $x_1 , x_2 ,\ldots\ldots, x_n$ تمثل قيم ظاهرة ما ولتكن X ، بيّن أن:

- $V(X)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{X})^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\overline{X}^2$
- $S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$

حل التمرين الأول:

لدينا:

$$V(X)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{X})^2$$

$$V(X)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum\left[x_i^2-2x_i\overline{X}+\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n}\left[\sum x_i^2-2\overline{X}\sum x_i+\sum\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{\sum x_i^2}{n}-2\overline{X}\bullet\frac{\sum x_i}{n}+\frac{\sum\overline{X}^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-2\overline{X}\bullet\overline{X}+\frac{n\overline{X}^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-2\overline{X}^2+\overline{X}^2$$

$$=\frac{\sum x_i^2}{n}-\overline{X}^2$$

لدينا:

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum\left[x_i^2-2x_i\overline{X}+\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-2\overline{X}\sum x_i+\sum\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-2\overline{X}(n\overline{X})+n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-n\overline{X}^2\right]$$

أو:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-n\overline{X}^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-n\bullet\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-n\bullet\frac{(\sum x_i)^2}{n^2}\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

التمرين الثاني: يعرض الجدول التالي توزيع عينة من عمال مؤسسة (B) حسب الدخل الشهري (الوحدة: 10^3 دج).

الدخل الشهري	أقل من 20	$]30-20]$	$]40-30]$	$]50-40]$	$]60-50]$	$]70-60]$	70 فأكثر	$\sum$
عدد العمال n_i	5	12	22	34	20	12	5	110

المطلوب:

1- ما هو مقياس التشتت المناسب لهذا التوزيع ثم حدد قيمته.

2- لنعتبر أن الفئات متساوية الطول، أحسب الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

3- قارن تشتت هذا التوزيع مع تشتت توزيع المثال رقم (4-02).

حل التمرين الثاني:

1- **مقياس التشتت المناسب لهذا التوزيع:** بما أن جدول التوزيع التكراري مفتوح فإن أفضل مقياس لقياس التشتت هو: معامل الاختلاف الربيعي.

الجدول (4-04): توزيع العمال حسب الدخل الشهري

الدخل الشهري X_i	عدد العمال n_i	$n_i \uparrow$	الدخل الشهري X_i	مركز الفئة x_i	$x_i n_i$	$(x_i-\overline{X})^2$	$(x_i-\overline{X})^2 n_i$
أقل من 20	5	5	$]20-10]$	15	75	889,23	4446,16
$]30-20]$	12	17	$]30-20]$	25	300	392,83	4714
$]40-30]$	22	39	$]40-30]$	35	770	96,43	2121,51
$]50-40]$	34	73	$]50-40]$	45	1530	0,0324	1,1016
$]60-50]$	20	93	$]60-50]$	55	1100	103,63	2072,65
$]70-60]$	12	105	$]70-60]$	65	780	407,23	4886,79
70 فأكثر	5	110	$]80-70]$	75	375	910,83	4554,16
$\sum$	110	–	$\sum$	–	4930	–	22796,36

حساب معامل الاختلاف الربيعي: $C.Q.V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100$

نقوم في البداية بحساب:

- **الربيع الأول Q_1:** $Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - N_0}{n_{Q_1}} \times k = 30 + \frac{27.5 - 17}{22} \times 10 = 34,77 \times 10^3 DA$

- **الربيع الثاني Q_2:** $Q_2 = L_1 + \frac{\frac{2N}{4} - N_0}{n_{Q_2}} \times k = 40 + \frac{55 - 39}{34} \times 10 = 44,7 \times 10^3 DA$

- **الربيع الثالث Q_3:**

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - N_0}{n_{Q_3}} \times k = 50 + \frac{82.5 - 73}{20} \times 10 = 54,75 \times 10^3 DA$$

ومنه نجد أن: معامل الاختلاف الربيعي:

$$C.Q.V = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} \times 100 = \frac{54,75 - 34,77}{44,77} \times 100 = 44,63\ \%$$

وعليه نقول أن تشتت هذا التوزيع هو تشتت متوسط.

2- **حساب الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف:** $S = \sqrt{S^2}$ حيث: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 n_i}{n-1}$

من أجل ذلك نقوم بإتباع الخطوات التالية:

- **حساب المتوسط الحسابي:**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \frac{4930}{110} = 44,82 \times 10^3 DA$$

- **حساب التباين:** $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{X}\right)^2 n_i}{n-1} = \frac{22796,36}{109} = 209,14$

ومنه $S = \sqrt{209,14} = 14,46$

- **حساب معامل الاختلاف:** $C.V = \frac{S}{\overline{\overline{X}}} \times 100 = \frac{14,46}{44,82} \times 100 = 0,3226 \times 100 = 32,26\%$

وعليه نقول أن تشتت هذا التوزيع هو تشتت ضعيف.

3- مقارنة تشتت التوزيعين:

من خلال استخدام معطيات المثال (4-02) توصلنا إلى النتائج التالية:

- **المتوسط الحسابي:**

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{6} n_i} = \frac{3840}{110} = 34,9 \times 10^3 \ DA$$

- **حساب الانحراف المعياري:** لدينا $S^2 = 217,26$ ومنه: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{219.26} = 14,81$

وعليه فإن معامل الاختلاف هو:

$$C.V_A = \frac{S}{\overline{\overline{X}}} \times 100 = \frac{14,81}{34,9} \times 100 = 0,4243 \times 100 = 42,43\ \%$$

أما معامل اختلاف التوزيع السابق هو:

$$C.V_B = \frac{S}{\overline{\overline{X}}} \times 100 = \frac{14,46}{44,82} \times 100 = 0,3226 \times 100 = 32,26\ \%$$

وبمقارنة معامل اختلاف التوزيعين نستنتج أن التوزيع الثاني أقل تشتت (أكثر تجانس) من التوزيع الأول.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول: لنفرض أنه لدينا السلسلتين التاليتين:

السلسلة A : 10 15 12 9 15 36 14 6

السلسلة B : 6 24 18 25 20 28 30 36

المطلوب:

1-أوجد المدى العام. ماذا تلاحظ ؟

2-كيف يمكن أن نفرق بين هذين التوزيعين الإحصائيين ؟

التمرين الثاني: ليكن التوزيع الإحصائي التالي:

X_i	3	5	7	9	11
n_i	15	28	8	40	9

المطلوب:

1- أحسب المدى العام، الانحراف المتوسط ومعامل الاختلاف.

2- أحسب الانحراف الربيعي ومعامل الاختلاف الربيعي.

التمرين الثالث:

ينتج مصنع نوعين من الآلات الفلاحية، حيث أن النوع الأول يهتلك في حال اشتغاله في المتوسط 6000 ساعة بانحراف معياري قدره 900 ساعة، أما النوع الثاني فيهتلك في حال اشتغاله في المتوسط 8000 ساعة بانحراف معياري يبلغ 1020 ساعة.

- ما هو النوع الأفضل من بين هاذين النوعين؟

التمرين الرابع:

الجدول التالي يوضح الإنفاق الشهري لعينة من الأسر في مدينتين **A** و **B** والمطلوب المقارنة بين المدينتين من حيث درجة التجانس في مستوى الإنفاق.

الإنفاق	$]25-20]$	$]30-25]$	$]35-30]$	$]40-35]$	$]45-40]$	$]50-45]$	$\sum$
المدينة A	2	15	30	24	19	10	100

المدينة B	32	35	15	10	6	2	100

التمرين الخامس:

البيانات التالية تبيّن توزيع عمال مصنعين ينتجان نفس السلع حسب الأجور الشهرية التي يتقاضاها العمال، غير أن المصنع الأول متواجد بالجزائر بينما المصنع الثاني متواجد بأوروبا.

توزيع الأجور الشهرية لعمال المصنع الأول (الوحدة: 10^3دج).

الأجر X_i	$]20-30]$	$]30-40]$	$]40-50]$	$]50-60]$	$]60-70]$	$]70-80]$	$\sum$
عدد العمال n_i	15	20	25	15	10	5	90

توزيع الأجور الشهرية لعمال المصنع الثاني (الوحدة: 10^2 يورو).

الأجر X_i	$]20-30]$	$]30-40]$	$]40-50]$	$]50-60]$	$]60-70]$	$]70-80]$	$\sum$
عدد العمال n_i	15	12	22	18	15	8	90

المطلوب:

1- أحسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري للمصنعين.

2- قارن بين تشتت أجور عمال المصنعين.

التمرين السادس:

الجدول التالي يبين توزيع العائلات حسب قيمة دخلها الشهري (10^3 دج).

الدخل X_i	أقل من 30	$]30-45]$	$]45-60]$	$]60-75]$	$]75-90]$	90 وأكثر	$\sum$
عدد العائلات n_i	12	25	30	18	15	10	90

المطلوب:

1- ما هو مقياس التشتت المناسب لهذا التوزيع ثم حدد قيمته.

2- إذا كانت الفئات متساوية الطول، أحسب الانحراف المعياري و معامل الاختلاف.

3- إذا كان Y توزيع آخر حيث: $\overline{y} = 70$ و $S_Y = 25$ قارن تشتت التوزيعين.

4- أحسب معامل الاختلاف الربيعي.